

Семинар 4

Линейные функционалы

0. Сколько существует линейных функционалов на векторном пространстве размерности m над полем из q элементов?
1. Проверить, что отображение $L_s(p(x)) = p'(s)$ является линейным функционалом на пространстве P_n вещественных многочленов степени $\leq n$.
2. Доказать, что линейные функционалы L_0, L_1, \dots, L_n образуют базис пространства линейных функционалов на пространстве P_n .
- 3*. Найти базис, дуальный базису из задачи 2.
4. Пусть L -ненулевой линейный функционал на векторном пространстве V . Доказать, что его ядро $\text{Ker}L = \langle v \in V \mid L(v) = 0 \rangle$ является подпространством размерности $\dim V - 1$.
5. Доказать, что для любого ненулевого функционала L на векторном пространстве V существует такой базис e_1, e_2, \dots, e_m в V , что $L(v) = v_1$ на векторе $v = v_1e_1 + \dots + v_me_m$.
6. Проверить, что из $\text{Ker}L_1 = \text{Ker}L_2$ для функционалов L_1, L_2 следует, что $L_1 = aL_2, a \in F^*$.
7. Доказать, что совпадение аннуляторов двух подпространств равносильно совпадению самих подпространств.
8. Проверить соотношения $\text{Ann}(U + W) = \text{Ann}U \cap \text{Ann}W, \text{Ann}(U \cap W) = \text{Ann}U + \text{Ann}W$.
9. Доказать, что всякое k -мерное подпространство n -мерного пространства является пересечением ядер некоторых $(n - k)$ линейных функционалов.