

**Семинарский листок 3**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I**

**Компактность, канторово множество, предел последовательности,  
фундаментальные последовательности**

1. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.
2. Множество называется совершенным, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Докажите, что канторово множество совершенно.
3. Докажите, что канторово множество нигде не плотно, а дополнение к нему плотно.
4. Рассмотрим поле рациональных функций над  $\mathbb{R}$ . Приведите пример фундаментальной последовательности, которая не сходится.
5. Пусть  $a > 0$ . Докажите, что  $a^{1/n} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . Более общо, пусть  $x_n \in [\varepsilon, M]$ , тогда  $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 1$ .
6. Найдите пределы последовательностей

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 7n + 7} - \sqrt{n^2 + 5n + 5}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^n + 7^n}{2} \right)^{1/n}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$$

7. Найдите пределы последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , где

$$(a) x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}, \quad (b) x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, x_1 = 1.$$

8. (a) Докажите, что последовательность  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  является возрастающей, а последовательность  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}_{n \in \mathbb{N}}$  является убывающей.

(b) Докажите, что пределы обеих последовательностей из пункта (a) совпадают. Это число есть основание натуральных логарифмов  $e \approx 2,71828 \dots$

- (c) Докажите неравенство  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  и покажите что оно влечёт

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

9. Докажите, что если  $x_n/x_{n-1} \rightarrow A$ , при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow A$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

10. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_N > 0$ . Найдите,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + \dots + x_N^n}$ .

11. Найдите пределы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}$$