Семинар 2.

Задача 1. На проективной прямой $\mathbb{P}^1$ даны 4 различные точки $A,\ B,\ C,\ D$ и выбрана некоторая проективная система координат, в которой эти точки имеют проективные координаты $(x_1 : y_1)$, $(x_2 : y_2)$, $(x_3 : y_3)$, $(x_4 : y_4)$. Введем на $\mathbb{P}^1$ аффинную координату t так, что точки $A,\ B,\ C$ имеют координату $0,\ 1,\ \infty$ соответственно. Выразите аффинную координату точки D через проективные координаты $(x_1 : y_1)$, $(x_2 : y_2)$, $(x_3 : y_3)$, $(x_4 : y_4)$.

Задача 2. Даны две различные проективные прямые l и m в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано перспективное отображение $f : l \xrightarrow{\sim} m$ с центром $A \notin l \cup m$. (По определению, образом произвольной точки $X \in l_1$ при отображении F является точка $Y = (AX) \cap m$.) Докажите, что f является проективным отображением.

Задача 3. Из определения перспективного отображения $f : l \xrightarrow{\sim} m$ между двумя прямыми l и m на плоскости, данного в предыдущей задаче, следует, что $f(S) = S$. Докажите, что, обратно, всякое проективное отображение $f : l \xrightarrow{\sim} m$, при котором точка $S = l \cap m$ отображается в себя, является перспективным отображением.

Задача 4. *Проективным репером* в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ называется совокупность $n+2$ точек $A,\ A_0, ..., A_n$ в $\mathbb{P}^n$ таких, что никакая из них не лежит в проективной оболочке любых n из оставшихся $n+1$ точек из этой совокупности. Докажите, что для любых проективных реперов $A,\ A_0,\ A_1$ в $\mathbb{P}^1$ и $A',\ A'_0,\ A'_1$ в $\mathbb{P}'^1$ существует единственное проективное отображение проективной прямой $\mathbb{P}^1$ в проективную прямую $\mathbb{P}'^1$, отображающее проективный репер $A,\ A_0,\ A_1$ в $\mathbb{P}^1$ в проективный репер $A',\ A'_0,\ A'_1$ в $\mathbb{P}'^1$, то есть такое, что $f(A) = A,\ f(A_0) = A'_0,\ f(A_1) = A'_1$.