Листок с задачами N1.

1. Принцесса выбирает жениха. Свататься приехали N женихов. Про любых двух принцесса может сказать кто лучше, а кто хуже. Все женихи образуют упорядоченное множество, т.е. если A лучше B и B лучше C, то A лучше C. Женихи заходят к принцессе по очереди в случайном порядке. Если невеста отказывает жениху, то он сразу уезжает. Если принцесса выбирает жениха, то все оставшиеся женихи тоже уезжают, и на этом просмотр женихов заканчивается. Принцессу интересует только лучший жених, а поэтому она задумалась над стратегией как максимизировать вероятность выбрать именно его (какая при этом будет вероятность выбрать, скажем, одного из 10 лучших ее не волнует). Принцесса решила следовать такой стратегии: она отказывает первым $M-1$ женихам, а затем выбирает следующего, который будет лучше всех предыдущих. Как ей выбрать M? Найдите асимптотику $M(N)$ при $N \to \infty$.

2. **Независимость в последовательностях σ-алгебр**. Пусть на вероятностном пространстве задана последовательность $\{B_k\}$ алгебр событий, образуем последовательность σ-алгебр $\mathcal{D}_m^\infty = \sigma(B_m, B_{m+1} \ldots)$, порожденных этими событиями. Дополнительное условие: наборы событий W_k, взятые из разных алгебр B_k, независимы в совокупности (такая последовательность естественно возникает при вероятностном описании бесконечной последовательности независимых экспериментов).

   Пусть $\mathcal{K} = \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{D}_m^\infty$ — пересечение σ-алгебр $\mathcal{D}_m^\infty$, ее интерпретация — «события в бесконечности», которые не зависят от событий на на каком фиксированном отрезке «времени». Показать, что вероятность любого события A из $\mathcal{K}$ удовлетворяет $P(A) = P(A)P(A)$, то есть его вероятность равна нулю или единице.

3. **Равномерное распределение на окружности** Радиус окружности равен 1, выберем случайно пару точек A и B на этой окружности. Найти вероятность, что длина хорды AB меньше $\sqrt{3}$

4. **Случайные направления на плоскости** Радиус окружности равен 1, выберем случайную точку A на этой окружности и проведем через нее прямую линию *в случайном направлении на плоскости*. Найти вероятность, что длина хорды AB между двумя точками пересечения с окружностью меньше $\sqrt{3}$

5. **Случайные направления в пространстве** Радиус двумерной сферы равен 1, выберем случайную точку A на этой сфере и проведем через нее прямую линию в случайном пространственном направлении. Найти вероятность, что длина отрезка AB между двумя точками пересечения со сферой меньше $\sqrt{3}$

6. **Случайные точки на окружности** Пусть две точки A, B случайно и независимо выбраны на окружности единичного радиуса $z = e^{2\pi i t}$. Как распределена длина дуги, содержащей точку $z = 1$?

7. **Случайные точки на отрезке** Пусть n точек $A_1 \ldots A_n$ случайно и независимо выбраны на единичном отрезке, они разбили его на $n+1$ лежащих подряд интервалов I_k. Найти функции распределения каждого из интервалов.

8. **Случайные плоскости в пространстве** В пространстве $\mathbb{R}^3$ единичный диск расположен случайно — это означает, что направления нормали к диску равномерно распределены на сфере. Спроектируем диск на координатную плоскость $0XY$ получится эллипс, как распределено отношение длин его малой и большой осей?

9. **Многомерная сфера как вероятностное пространство** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим гиперсферу $S^{n-1}(r)$ радиуса r с центром в начале координат. Введем в $\mathbb{R}^n$ сферические координаты, отсчитывая угол ψ от положительного направления первой координатной оси, которую мы будем обозначать как ось x. Нас интересует вероятность случайной точке попасть в «сферическую шапочку» — подмножество точек на сфере, отвечающих $0 \leqslant \psi < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, вернее зависимость этой вероятности от размерности n и ε.

   Оцените долю (гипер)площади в этой шапочке от (гипер)площади всей сферы $S^{n-1}(r)$ Докажите, что вероятность случайной точкой попасть в шапочку сферы стремится к нулю при $n \to \infty$.

   Таким образом подавляющая часть площади многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности ее (любого) экватора. В частности, выбранные наугад два единичных вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \gg 1$ с большой вероятностью окажутся почти ортогональными, ибо вероятность того, что их скалярное произведение сколь-нибудь заметно отклонится от нуля, быстро убывает с ростом величины отклонения. Действительно, все направления в пространстве $\mathbb{R}^n$ считаются равноправными, выбранные векторы случайны и независимы. Если один из них выбран, то направление второго с большой вероятностью окажется в окрестности экватора единичной сферы, сопряженного направлению первого вектора.