

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 2024. ЗАДАЧИ 5.
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

1. Пусть $\alpha \sim Uniform[0, 1]$. Найдите следующие функции:

- (a) Функцию плотности $p_\beta(x)$, если случайная величина β такова, что $\beta = 3\alpha - 1$
- (b) Функцию плотности $p_\gamma(x)$, если случайная величина γ такова, что $\gamma = -\ln(\alpha)$
- (c) Функцию плотности $p_\kappa(x)$, если случайная величина κ такова, что

$$\kappa = \begin{cases} 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots & \alpha \in (0, 1) \\ 0 & \alpha \notin (0, 1) \end{cases}$$

- (d) Функцию плотности $p_\epsilon(x)$, если

$$\epsilon = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \alpha^j & \alpha \in (0, 1) \\ 0 & \alpha \notin (0, 1) \end{cases}$$

- (e) Функцию распределения $F_\rho(x)$, если случайная величина ρ такова, что

$$\rho = \begin{cases} 1 & \alpha \text{ иррациональное} \\ 0 & \alpha \text{ рациональное} \end{cases}$$

2. Случайная величина α равномерна на отрезке $[-1, 3]$, найти плотность для $-|\alpha|$

3. Случайная величина α равномерна на отрезке $[-1, 3]$, найти функцию распределения для $\frac{|\alpha|}{\alpha}$

4. Случайная величина α равномерна на отрезке $[-1, 1]$, независимая с α случайная величина β – бернуллиевская с параметром $p = \frac{1}{3}$.

- (a) Найти функцию распределения случайной величины $\alpha\beta$
- (b) Найти функцию распределения случайной величины $|\alpha|\beta$
- (c) Найти функцию распределения случайной величины $|2\alpha - 1|\beta$

5. Случайная величина α равномерна на отрезке $[0, 1]$, случайная величина β независима с α .

- (a) Найти функцию плотности распределения случайной величины $2\alpha - \beta$, если β – распределена по показательному закону с параметром 1.
- (b) Найти функцию распределения случайной величины $\alpha + \beta$, если β – дискретна и распределена по пуассоновскому закону.
- (c) Найти функцию распределения случайной величины $\alpha + 2\beta$, если β – геометрическая случайная величина.

6. Случайная величина γ распределена по показательному закону с параметром a , случайная величина θ также распределена по показательному закону с параметром b , при этом γ, θ независимы.

- (a) Найти функцию плотности с.в $\sqrt{\gamma}$
- (b) Найти функцию плотности с.в γ^2
- (c) Найти функцию плотности с.в $1 - e^{-a\gamma}$
- (d) Найти функцию плотности с.в $\max(\gamma, \theta)$

- (e) Найти функцию плотности с.в $\min(\gamma, \theta)$
- (f) Найти функцию плотности с.в $\gamma + \theta$
7. * Пусть X_1, X_2, \dots — независимые случайные величины, с одинаковым распределением $\exp(\lambda)$. Пусть $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$ и $N_t := \inf\{n \geq 0 : Y_{n+1} > t\}$, $t > 0$.
- (a) Докажите что распределение Y имеет плотность $\rho_n(y) := e^{-\lambda y} \frac{\lambda^n y^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}_{y \geq 0}$.
- (b) Докажите что $\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$ (это означает, что $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$).
8. Точка (x, y) выбирается из квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ согласно равномерному распределению. Найдите распределение случайной величины $x^2; x/(x+y); x^2 + y^2, \min(x, y), \max(x, y)$.
9. Пусть случайный вектор (α, β) равномерно распределен в области $\mathcal{G} = \{|x| + |y| < 1\}$. То есть соответствующая двумерная плотность распределения

$$f_{(\alpha, \beta)}(x, y) = \begin{cases} \text{const} & x, y \in \mathcal{G} \\ 0 & x, y \notin \mathcal{G} \end{cases}$$

- (a) Чему равна константа в формуле?
- (b) Найти плотности $f_\alpha(x), f_\beta(y)$ распределения первой α и второй β координат вектора.
- (c) Зависимы ли α и β ?
- (d) Найти плотности распределения для $\alpha + \beta$ и для $\alpha - \beta$.
10. Пусть случайный вектор (α, β) равномерно распределен в верхнем полукруге $\mathcal{G} = \{x^2 + y^2 < 1 \quad y > 0\}$. То есть соответствующая двумерная плотность распределения

$$f_{(\alpha, \beta)}(x, y) = \begin{cases} \text{const} & x, y \in \mathcal{G} \\ 0 & x, y \notin \mathcal{G} \end{cases}$$

- (a) Чему равна константа в формуле?
- (b) Найти плотность $f_\alpha(x)$ — первой α координаты вектора.
- (c) Найти плотность распределения для $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Нарисовать график $f_\rho(t)$.
- (d) Найти плотность распределения для $\phi = \arccos(\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$. Нарисовать график $f_\phi(t)$.
- (e) Зависимы ли ρ и ϕ ?
- (f) Найти плотность распределения для $\xi = \alpha/\beta$. Нарисовать график $f_\xi(t)$.
- (g) Найти плотность распределения для $\eta = \alpha^2/\beta^2$. Нарисовать график $f_\eta(t)$.
- (h) Найти плотность распределения для $\theta = \alpha^2 + \beta^2$. Нарисовать график $f_\theta(t)$.