Теория вероятностей 2024. Задачи 4. Случайные величины.

Если написано «дана/известна случайная величина», ξ то подразумевается, что известны $\mathbb{P}_\xi, F_\xi, p_\xi$ (если плотность существует). Если вас просят найти распределение ξ, то достаточно найти любой из объектов выше.

Распределение дискретных случайных величин

1. Дано распределения случайного вектора

$\beta \setminus \alpha$	-2	-1	0	1	2
-2	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$
-1	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$
0	$1/24$	$1/24$	$1/6$	$1/24$	$1/24$
1	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$
2	$1/32$	$1/32$	$1/24$	$1/32$	$1/32$

   (a) Найти вероятность $P(\alpha = \beta)$.
   (b) Найти вероятность $P(\alpha > \beta)$.
   (c) Найти вероятность $P(\alpha \leqslant \beta)$.
   (d) Найти распределения α и β.
   (e) Верно ли, что α и β независимы?
   (f) Найти распределение $\alpha + \beta$.
   (g) Найти распределение $\alpha\beta$.
   (h) Найти распределение случайного вектора с компонентами $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$.
   (i) Найти распределение случайного вектора с компонентами $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$.

2. Даны распределения независимых случайных величин ξ и η:

ξ	-2	-1	0	1	2
	$1/4$	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/4$

η	-2	-1	0	1	2
	$1/8$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/8$

   (a) Найти вероятность $P(\xi = \eta)$.
   (b) Найти вероятность $P(\xi > \eta)$.
   (c) Найти вероятность $P(\xi \leqslant \eta)$.
   (d) Найти распределения $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$.
   (e) Найти распределение $\xi\eta$.
   (f) Найти распределение случайного вектора с компонентами $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$.
   (g) Зависимы ли $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$?
   (h) Найти распределение случайного вектора с компонентами $\xi + \eta$ и $\xi\eta$.

Независимость случайных величин

3. Привести пример двух зависимых, но не функционально зависимых дискретных с.в. или объяснить почему такой пример не существует.

4. Верно ли, что если ξ, η независимы, то и для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с.в. $f(\xi)$, $f(\eta)$ независимы?

5. Верно ли, что если ξ, η зависимы, то и ξ^2, η^2 обязательно зависимы?

6. Пусть (X, Y) имеет равномерное распределение в $(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$. Являются ли величины X и Y независимыми?

7. Пусть вероятностное пространство имеет вид $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), Leb)$. Зависимы ли следующие случайные величины?
   a) $x(t) = 2t$, $y(t) = 1 - t^2$
   b) $x(t) = \operatorname{sign}[\sin(2\pi t)]$, $y(t) = \operatorname{sign}[\sin(4\pi t)]$
   c)$x(t) = \operatorname{sign}[\sin(2\pi t)]$, $y(t) = \operatorname{sign}(t - 1/3)$?

8. Пусть $\xi \sim Uniform([0,1])$, а $\eta \sim Bernoulli(1/3)$. Поселите эти случайные величины на одном и том же вероятностном пространстве, так, чтобы они были
   а) независимы   б) зависимы.

   Имеется ввиду, что в нужно придумать вероятностное пространство (свое для каждого из пунктов) и случайную величину $\zeta = (\alpha, \beta)$ на нем, такую что $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_\xi$ и $\mathbb{P}_\eta = \mathbb{P}_\beta$.

Функция распределения

9. Имеется случайная величина ξ с распределением ниже. Нарисуйте F_ξ и F_{ξ^2}.

ξ	-1	0	1
$\mathbb{P}_\xi$	$1/5$	$2/5$	$2/5$

10. Нарисуйте функцию распределения F_ξ для $\xi \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$.

11. Стержень длины 2 сломали в случайной точке. Введите явно, с указанием вероятностного пространства, случайную величину ξ, дающую длину большего куска из двух получившихся. Найдите F_ξ, F_{ξ^2} и плотности p_ξ, p_{ξ^2}.

12. Даны независимые случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Найдите функцию распределения случайной величины   a) $\max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$,   b) $\min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

13. Пусть случайная величина ξ непрерывна (то есть, ее функция распределения F_ξ непрерывна). Найдите распределение случайной величины $F_\xi(\xi)$.

14. Пусть $\xi \sim Uniform([-1, 1])$. Найдите распределение случайной величины $F_{|\xi|}(\xi)$.

15. * *Смеси.* На вероятностном пространстве Ω рассматривается следующая конструкция случайной величины $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$: сначала по равномерной на отрезке $[0,1]$ с.в. η выбирают отрезок $[0, \eta(\omega)]$, а потом независимо выбирают случайную величину $\zeta(\omega) := \xi_{\eta(\omega)}(\omega)$ с заданным распределением на отрезке $[0, \eta(\omega)]$. Найти плотность распределения получившейся случайной величины ξ, если

    a) $\xi_a \sim Uniform([0, a])$,   b) $\xi_a^2 \sim Uniform([0, a])$.

16. * Пусть $\xi \sim Exp(1)$. Зависимы ли ее целая и дробная части?