Семинар 4.

Задача 1. Два треугольника ABC и $A'B'C'$ на проективной плоскости называются перспективными, если прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны. Обозначим точки пересечения соответственных прямых этих треугольников: $M = AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$, $P = AC \cap A'C'$. Докажите теорему Дезарга, которая утверждает, что точки M, N и P коллинеарны. Сформулируйте обратную теорему Дезарга.

Задача 2. На проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ дан полный 4-вершинник $PQRS$. Рассмотрим точки $A = PQ \cap RS$ и $B = QR \cap PS$, и на проективной прямой $\mathbb{P}^1 = AB$ рассмотрим точки $C = \mathbb{P}^1 \cap QS$ и $D = \mathbb{P}^1 \cap PR$. Говорят, что пара точек CD *гармонически делит* пару точек AB, и обозначается это так: $AB \overset{h}{-} CD$. Можно показать, что если $AB \overset{h}{-} CD$, то $CD \overset{h}{-} AB$.

1) Пусть $AB \overset{h}{-} CD$. Проверьте, что $(ABCD) = -1$.

2) Докажите, что для точек A, B, C, построеннных выше с помощью 4-вершинника $\square = PQRS$, заменить этот 4-вершинник на новый 4-вершинник $\square' = P'Q'R'S'$, дающий ту же тройку точек A, B, C, то оба 4-вершинника $\square$ и $\square'$ дают одну и ту же точку D в качестве четвертой точки.

Задача 3. Даны две различные проективные прямые l_1 и l_2 в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и пусть даны различные точки $A, B, C \in l_1$ и $A', B', C' \in l_2$, отличные от S. Докажите теорему Паппа, утверждающую, что точки $M = AB' \cap A'B$, $N = AC' \cap A'C$ и $P = BC' \cap B'C$ коллинеарны. (Прямая MN называется *прямой Паппа.*)

Задача 4. Даны две различные проективные прямые l_1 и l_2 в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано проективное отображение $F : l_1 \xrightarrow{\sim} l_2$ такое, что $F(S) \neq S$. Пусть p - прямая Паппа, построенная по точкам $A, B, C \in l_1$ и точкам $f(A), f(B), f(C) \in l_2$. Покажите, что прямая Паппа p не зависит от выбора точек $A, B, C \in l_1$, а зависит только от отображения f. Как ее построить, зная только отображение f и не привлекая точек $A, B, C \in l_1$ и точек $f(A), f(B), f(C) \in l_2$.