Семинар 3.

В этом и последующих заданиях всюду через $\mathbf{k}$ обозначается основное поле. Поле $\mathbf{k}$ может быть числовым полем, например, $\mathbf{k} = \mathbb{C},\ \mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, либо нечисловым, например, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$. Элементы основного поля будем называть *скалярами*. Если в задаче не оговаривается, над каким основным полем мы работаем, то, значит, задача сформулирована для произвольного основного поля $\mathbf{k}$.

Задача 1. Пусть характеристика основного поля $\mathbf{k}$ не равна 2 (это обозначается так: $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$). Даны 4 различные точки $A,\ B,\ C,\ D$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$, имеющие аффинные координаты соответственно $a,\ b,\ c,\ d$ в некоторой аффинной карте. Выражение $\left(\frac{a-c}{a-d}\right)/\left(\frac{b-c}{b-d}\right)$ называется *двойным отношением* точек $A,\ B,\ C,\ D$.
1) Какие значения НЕ может принимать двойное отношение $\lambda = (A_1A_2A_3A_4)$ четырех точек $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ на проективной прямой?
Пусть $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$.
2) Рассмотрим группу перестановок S_4 чисел 1, 2, 3, 4. Для $\sigma \in S_4$ и $\lambda = (A_1A_2A_3A_4)$ обозначим $\sigma(\lambda) = (A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}A_{\sigma(3)}A_{\sigma(4)})$. Сколько значений может принимать $\sigma(\lambda)$, когда σ пробегает все 24 перестановки из группы S_4? Перечислите эти значения.
3) Сколько имеется таких перестановок $\sigma \in S_4$, что $\sigma(\lambda) = \lambda$? Перечислите эти перестановки.

Задача 2. Дана проективная прямая l, и дано проективное преобразование $f : l \xrightarrow{\sim} l$, задаваемое в аффинной карте на l с аффинной координатой x как дробно-линейное преобразование $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$. Преобразование f называется *инволюцией*, если f не является тождественным преобразованием, а его квадрат $f^2 := f \circ f$ является тождественным преобразованием.
1) Какие условия надо наложить на коэффициенты $a,\ b,\ c,\ d$, чтобы f было инволюцией?
2) Пусть проективное преобразование f проективной прямой таково, что для некоторой точки a выполнены условия $f(a) \neq a$ и $f^2(a) = a$. (В этом случае пара точек $(a, f(a))$ называется *инволютивной парой*.) Докажите, что f - инволюция. (Другими словами, всякое проективное преобразование прямой, имеющее хотя бы одну инволютивную пару, является инволюцией.)

Задача 3. Сколько неподвижных точек может иметь произвольное нетождественное проективное преобразование f проективной прямой $\mathbb{P}^1$:
а) над произвольным основным полем $\mathbf{k}$,
б) над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$?
в) Ответьте на вопросы а) и б), когда f - инволюция.

Задача 4. Даны две различные проективные прямые l и m в проективной плоскости, пересекающиеся в точке S, и дано проективное отображение $f : l \xrightarrow{\sim} m$ такое, что $f(S) \neq S$. В композицию какого минимального числа перспектив можно разложить отображение f?