Семинар 5

Линейные преобразования 1

0. Линейный оператор A в некотором базисе записывается матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти базис подпространства $\mathrm{Im} A$.

1. Найти ядро и образ оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n.

2. Пусть L_1, L_2 – подпространства векторного пространства V. Для существования линейного оператора $A\colon V \to V$ с ядром $\mathrm{Ker} A = L_1$ и образом $\mathrm{Im} A = L_2$ необходимо и достаточно, чтобы $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim V$ (доказать).

3. Линейный оператор $A\colon V \to V$ таков, что $A^2 = A$. Доказать,что $\mathrm{Ker} A \oplus \mathrm{Im} A = V$.

4. Доказать, что ранг матрицы эпиморфного линейного отображения равен числу ее строк. Ранг матрицы мономорфного линейного отображения равен числу ее столбцов.

5. В вещественном векторном пространстве V существует такой линейный оператор J, что $J^2 = -E$. Доказать, что V имеет четную размерность.

6. Пусть $A\colon V \to W$ – линейное отображение и $U \subseteq V$- подпространство V. Тогда $\dim A(U) = \dim U - \dim(U \cap \mathrm{Ker} A)$ (доказать).

7. Линейное отображение $A\colon V \to W$ можно представить в виде композиции линейного эпиморфизма $V \to U$ и линейного мономорфизма $U \to W$, где U – некоторое пространство, размерность которого равна рангу отображения A (доказать).

8. Пусть V, U, W – векторные пространства и $A\colon V \to W$, $B\colon U \to W$ – их линейные отображения. Сформулировать необходимое и достаточное условие для существования такого линейного отображения $C\colon V \to U$, что $A = B \circ C$.

9*. Пусть V, W – векторные пространства размерности n и m над полем из q элементов. Сколько существует линейных мономорфизмов $V \to W$? Сколько существует линейных эпиморфизмов $V \to W$?