## Семинар 6
## Линейные операторы в базисах

1. Линейный оператор в $\mathbb{R}^3$ переводит векторы базиса $(1,1,1),(0,1,0),(1,0,2)$ соответственно в векторы $(1,1,1),(1,1,0),(1,2,2)$. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $(1,0,0)$, $(0,1,0),(0,0,1)$.

2. Линейный оператор в $\mathbb{R}^3$ имеет в базисе $(8,-7,6),(-16,7,-13),(9,-3,7)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & 25 & 22 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $(1,-2,1),(3-,1,2),(2,1,2)$.

## HOM(V,W)

3. Проверить, что если $A \in \mathrm{HOM(V,W)}$, а $L$ – подпространство в $W$, то его полный прообраз при линейном отображении $A$ является подпространством в $V$.

4. Если $(v_1,\ldots,v_k)$ – независимое семейство в $V$, а $(w_1,\ldots,w_k)$ – любое семейство в $W$, то найдется такое $A \in \mathrm{HOM(V,W)}$, что $A(v_i) = w_i$ (доказать). В каком случае существует единственное линейное отображение $A$ с таким свойством?

## Операторы ранга 1

5. Пусть $A$ – линейный оператор ранга 1. Тогда существуют ненулевой линейный функционал $l$ и ненулевой вектор $w$ из $V$, такие что $A(v) = l(v)w$ (доказать). Как обобщить это утверждение на случай оператора ранга $k$?

## Сопряженный оператор

6. Пусть $A$ – линейный оператор в пространстве $V$. Рассмотрим в двойственном пространстве $V^*$ сопряженный оператор $A^*$, который линейный функционал $l$ переводит в линейный (?) функционал $A^*(l)$, принимающий на векторе $v \in V$ значение $A^*(l)(v) = l(Av)$. Доказать,что $A^*$ – линейный оператор.

Пусть оператор A в базисе пространства V записывается матрицей $[A]$. Какой матрицей записывается сопряженный оператор в двойственном базисе?

7. Докажите,что $\mathrm{Ker}A^* = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}A)$. Отсюда следует, например, что ранг матрицы по строчкам равен ее рангу по столбцам.

## Группа GL(V)

8. Доказать, что невырожденные линейные операторы, действующие в пространстве $V$, образуют группу по умножению. Обозначим ее через $\mathrm{GL}(V)$. Показать, что группа $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на множестве $k$-мерных подпространств пространства $V$.

9. Рассмотрим в пространстве $V$ пары подпространств $(U_1,U_2)$ и $(W_1,W_2)$. Сформулировать необходимые и достаточные условия для существования такого элемента $g \in \mathrm{GL}(V)$, что $g(U_i) = W_i$, $i = 1,2$.

## Просто так

$10^*$. Пусть $A$ – квадратная матрица порядка $m$ и ранга $k$. В векторном пространстве $m \times n$- матриц рассмотрим оператор левого умножения на матрицу $A$. Доказать, что $A$ – линейный оператор и найти размерность его ядра.