Прикладные методы анализа – 2024
Листок 3

1. Пусть F – вещественнозначная гармоническая функция на плоскости. Для каких функций G композиция $G(F)$ будет гармонической функцией?

2. Найдите функцию Грина задачи Дирихле для следующих областей: а) полуплоскость, б) круг радиуса R, в) полоса $0 < \operatorname{Im} z < 1$, г) правый верхний квадрант плоскости.

3. Докажите, что функция Грина области D выражается формулой

$$G(z,\zeta) = \log\left|\frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|,$$

где $w(z)$ – конформное отображение области D на единичный круг, и что правая часть этой формулы не зависит от выбора конформного отображения (от его нормировки).

4. Получите формулу для ядра Пуассона $P(z,\xi) = \partial_{n_\xi} G(z,\xi)$, $\xi \in \partial\mathsf{D}$, для произвольной области D с гладкой границей через конформное отображение $w(z)$ области D на единичный круг.

5. Пусть функция $\varphi(\theta)$ представляется рядом Фурье

$$\varphi(\theta) = a_0 + \sum_{k\geq 1}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Покажите, что функция

$$u(re^{i\theta}) = a_0 + \sum_{k\geq 1}\frac{r^k}{R^k}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

дает решение задачи Дирихле в круге радиуса R с граничным значением $u = \varphi$, а функция

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k\geq 1}\frac{r^k}{kR^{k-1}}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + C$$

дает решение задачи Неймана в круге радиуса R с граничным значением нормальной производной φ (при условии $a_0 = 0$).

6. а) Покажите, что решение задачи Дирихле для полуплоскости $y > 0$ имеет вид

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(t)dt}{(x-t)^2 + y^2},$$

если граничное значение u_0 ведет себя при $|t| \to \infty$ как $u_0(t) = O(|t|^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$;

б) Покажите, что решение задачи Неймана для полуплоскости $y > 0$ имеет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \log\Big((x-t)^2 + y^2\Big) dt + C,$$

если граничное значение нормальной производной u_1 ведет себя при $|t| \to \infty$ как $u_1(t) = O(|t|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

7. Проверьте, что при условии $\oint_{\partial \mathsf{D}} g(\xi)\,|d\xi| = 0$ формула

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \oint_{\partial \mathsf{D}} \log\big|w(z) - w(\xi)\big|\, g(\xi)\,|d\xi| + C$$

решает задачу Неймана в области D (т.е. что функция f гармоническая и ее нормальная производная на границе равна g) и убедитесь, что решение с точностью до произвольной аддитивной постоянной не зависит от выбора конформного отображения $w(z)$ области D на единичный круг.

8. Найдите нормальную производную $\partial_{n_\xi} G^{(N)}(z, \xi)$, $\xi \in \partial \mathsf{D}$, функции Грина задачи Неймана

$$G^{(N)}(z, \zeta) = \log\Big|w(z) - w(\zeta)\Big| + \log\Big|1 - w(z)\overline{w(\zeta)}\Big|$$

и объясните смысл полученного ответа.

9.* Существует ли формула для вариации функции Грина задачи Неймана, аналогичная формуле Адамара?