Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания со 2 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) Из 6 задачи прошлого задания нам осталось показать, что полукубическая парабола $y^2 = x^3$ не изоморфна остальным трем кривым из этой задачи, и был даже предложен один из возможных путей доказательства: предлагается доказать, что идеал начала координат на этой кривой не главный. Теперь добавляются аналогичные вопросы про декартов лист $y^2 = x^3 + x^2$: надо доказать, что эта кривая также рациональна, но при этом не изоморфна ни одной из остальных обсуждавшихся кривых.

(2) Напомним, что, по определению, рациональная функция $\varphi \in \mathbb{K}(X)$ на неприводимом аффинном алгебраическом многообразии X называется регулярной в точке $a \in X$, если существует такое представление $\varphi = \dfrac{f}{g}$, где f и g регулярные функции на X (т.е. $f, g \in \mathbb{K}[X]$) и $g(a) \neq 0$.

а) Докажите, что если рациональная функция $\varphi \in \mathbb{K}(X)$ регулярна во всех точках X, то $\varphi \in \mathbb{K}[X]$.

б) Пусть $g \in \mathbb{K}[X]$, рассмотрим главное открытое множество $U_g = \{x \in X \text{ таких, что } g(x) \neq 0\}$. Покажите, что рациональная функция $\varphi \in \mathbb{K}(X)$ регулярна во всех точках U_g тогда и только тогда, когда φ имеет представление вида $\varphi = \dfrac{f}{g^m}$, где $f \in \mathbb{K}[X]$, а m некоторое натуральное число.

(3) Покажите, что любая рациональная функция на аффинной плоскости, регулярная во всех точках открытого множества $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0;0)\}$, является многочленом.