Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 1 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) Пусть I — идеал в кольце A. Докажите, что имеется биекция между множеством идеалов фактор-кольца A/I и множеством идеалов кольца A, содержащих идеал I. Сохраняется ли при этом соответствии свойство идеала быть а) максимальным; б) простым; в) радикальным? Какова геометрическая интерпретация этого соответствия в случае, когда X и Y — аффинные алгебраические многообразия в $\mathbb{A}^n$, $X \subset Y$, $A = \mathbb{K}[Y]$, а $I \subset \mathbb{K}[Y]$ — идеал подмногообразия X (т.е. $I = \{f \in \mathbb{K}[Y]$ таких что $f(x) = 0 \quad \forall x \in X\})$?

(2) Пусть I — идеал в кольце A. Радикалом идеала I называется множество таких $a \in A$, что $a^m \in I$ для некоторого натурального m. Докажите, что радикал идеала совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих I. (Включение в одну сторону было доказано на лекции, осталось доказать в другую сторону.)

(3) Докажите, что аффинное алгебраическое многообразие X неприводимо тогда и только тогда, когда в $\mathbb{K}[X]$ (алгебре регулярных функций на X) нет делителей нуля. (Набросок доказательства был дан на лекции.)

(4) На лекции было дано следующее определение. Пусть $f_1, \dots, f_m$ — некоторые регулярные функции на аффинном алгебраическом многообразии X (т.е. $f_i \in \mathbb{K}[X]$). Тогда регулярным отображением $F : X \to \mathbb{A}^m$ называется отображение, сопоставляющее точке $x \in X$ точку $F(x) := (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{A}^m$. Если при этом имеется аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, такое что $F(x) \in Y$ $\forall\ x \in X$, то мы говорим, что задано регулярное отображение $F : X \to Y$. Тогда, как мы видели, сопоставление любой регулярной

функции $g \in \mathbb{K}[Y]$ функции $F^*(g) = g \circ F \in \mathbb{K}[X]$ является гомоморфизмом алгебр регулярных функций $F^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$. Покажите, что и наоборот, любой гомоморфизм алгебр регулярных функций $\varphi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ есть F^* для некоторого регулярного отображения аффинных алгебраических многообразий $F : X \to Y$.

(5) Мы выяснили, что сюръективность гомоморфизма F^* из предыдущей задачи означает, что X — замкнутое аффинное алгебраическое подмногообразие в Y. А какую геометрическую информацию об отображении $F : X \to Y$ несет утверждение об инъективности гомоморфизма F^*?

(6) Кривые Y, Z и W заданы на аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$ уравнениями, соответственно, $xy = 1$ (гипербола), $x^2+y^2 = 1$ (окружность) и $y^2 = x^3$ (полукубическая парабола); мы выяснили, что все три кривые рациональны (т.е. бирационально изоморфны аффинной прямой $\mathbb{A}^1$). Какие из четырех кривых $\mathbb{A}^1$, Y, Z и W попарно изоморфны, а какие нет? Мы выяснили только, что гипербола Y не изоморфна прямой $\mathbb{A}^1$.

(7) Дополнительный вопрос про окружность: свидетельствует ли равенство $y^2 = (1-x)(1+x)$ о том, что в $\mathbb{K}[Z]$ разложение на неприводимые сомножители не однозначно?