Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

Задания с 3 занятия.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии.

(1) Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие, $a \in X$, U — главное открытое подмножество в X и $a \in U$. Обозначим через m_a, $\tilde{m}_a$ и $\bar{m}_a$, соответственно, максимальные идеалы точки $a \in X$ в кольцах $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}[U]$ и $\mathcal{O}_{a,X}$. Покажите, что векторные пространства m_a/m_a^2, $\tilde{m}_a/\tilde{m}_a^2$ и $\bar{m}_a/\bar{m}_a{}^2$ изоморфны.

(2) Пусть A — коммутативное кольцо, $S \subset A$ — мультипликативно замкнутое подмножество.

   а) Докажите, что имеется биекция между **простыми** идеалами кольца $S^{-1}A$ и **простыми** идеалами кольца A, не пересекающимися с S.

   б) Приведите пример, показывающий, что без условия простоты предыдущее утверждение **неверно**. (На лекции эта задача была ошибочно сформулирована без необходимого в ней условия простоты идеала.)

   в) Покажите, что в случае, когда $A = \mathbb{K}[X]$ (кольцо регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X), а $S = \{1, g, g^2, \ldots\}$ ($g \in \mathbb{K}[X]$), описанная в первом пункте биекция соответствует биекции между неприводимыми замкнутыми подмножествами $Y \subset X$, не содержащимися в замкнутом множестве $V(g) = \{x \in X, \quad g(x) = 0\}$ (т.е. $Y \nsubseteq V(g)$), и неприводимыми замкнутыми подмножествами в главном открытом множестве $U_g = \{x \in X, \quad g(x) \neq 0\}$, сопоставляющей замкнутому подмножеству $Y \subset X$ множество $Y \cap U_g \subset U_g$. Объясните, почему без условия неприводимости такое соответствие уже не будет биекцией.

(3) а) Пусть X — приводимое аффинной алгебраическое многообразие, X_1 — одна из его неприводимых компонент, и точка $a \in X_1$ и не лежит на остальных компонентах многообразия X. Покажите, что локальные кольца $\mathcal{O}_{a,X}$ и $\mathcal{O}_{a,X_1}$ изоморфны.

б) Пусть X — приводимое аффинное алгебраическое многообразие, имеющее две неприводимые компоненты X_1 и X_2 и пусть $X_2 = V(f)$, для некоторой регулярной функции $f \in \mathbb{K}[X]$. Пусть $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ — мультипликативно замкнутое множество, рассмотрим кольцо частных $S^{-1}\mathbb{K}[X]$ и естественное отображение $\varphi : \mathbb{K}[X] \to S^{-1}\mathbb{K}[X]$. Найдите ядро и образ этого отображения. Докажите, что кольцо $S^{-1}\mathbb{K}[X]$ изоморфно кольцу $\mathbb{K}[U]$ регулярных функций на главном открытом множестве $U \subset X_1$, где $U = X_1 \setminus V(\tilde{f})$, а $\tilde{f} \in \mathbb{K}[X_1]$ это ограничение функции f на компоненту X_1.

(4) Пусть $a \in X$ — неособая точка аффинной кривой $X \subset \mathbb{A}^2$. Покажите, что в локальном кольце $\mathcal{O}_{a,X}$ имеется ровно два простых идеала: нулевой (т.е. $\mathcal{O}_{a,X}$ не имеет делителей нуля) и максимальный идеал точки a $m_a = \{\varphi \in \mathcal{O}_{a,X}, \quad \varphi(a) = 0\}$, причем m_a является главным идеалом. Если $m_a = (f)$, $f \in \mathcal{O}_{a,X}$, то f называется *локальным параметром на кривой X в точке a*. Покажите, что тогда любая функция $\varphi \in \mathcal{O}_{a,X}$ однозначно представляется в виде $\varphi = f^m g$, где g обратимо в $\mathcal{O}_{a,X}$. (При этом m называется *порядком нуля функции f в точке a*.) Выведите из этого, что кольцо $\mathcal{O}_{a,X}$ целозамкнуто в своем поле частных.

(5) Приводимая аффинная кривая $X \subset \mathbb{A}^2$ задана уравнением $xy = 0$, точка $a = (0; 0) \in X$. Покажите, что локальное кольцо $\mathcal{O}_{a,X}$ изоморфно подкольцу прямого произведения $\mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^1} \times \mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^1}$, состоящему из таких пар функций $(\varphi, \psi) \in \mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^1} \times \mathcal{O}_{0,\mathbb{A}^1}$, что $\varphi(0) = \psi(0)$. Покажите, что идеал $m_a \subset \mathcal{O}_{a,X}$ точки a не главный и вычислите $\dim m_a/m_a^2$.

(6) Вычислите группы автоморфизмов аффинной прямой и гиперболы.