

Домашнее задание 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-1

Срок сдачи: 29 октября

Минимум из количества сданных задач и 10 равняется оценке за листок.

1. (а) Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такова, что подпоследовательности $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ и $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ сходятся. Обязательно ли сходится сама последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (б) Последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такова, что сходятся подпоследовательности $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ и $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Обязательно ли сходится последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

2. Пусть даны две ограниченные последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Докажите неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Приведите примеры, когда имеют место строгие неравенства.

3. Пусть $y_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + A$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + A$

4. К чему и при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится последовательность заданная как

$$x_n = \frac{n2^n + \alpha^n}{(n+1)2^n + (2n+3)\alpha^n}?$$

5*. Докажите, что у последовательности $(n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ есть ограниченная подпоследовательность.

6. Найти $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ последовательности с n -м членом $(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} + n2^{-n}$.

7. Пусть последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задана соотношением $x_{n+1} = ax_n + b$ (числа $a \neq 1, b, x_0$ считаем известными). Найдите явную формулу для x_n и определите, при каких a, b, x_0 последовательность сходится.

8. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обязательно ли сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

9. Сходятся ли ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{\ln n}, \quad q \in (0, 1)?$$

10**. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$, где p_n — n -е простое число?

11. Покажите, что ряд сходится и найдите его сумму

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right).$$

12. Сходятся ли ряды

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sin n}{n^2 - n + 1}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Звёздочкой помечены задачи повышенной сложности.