Прикладные методы анализа – 2024
Листок 5

1. а) Проверьте, что оператор Лапласа на плоскости $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ в полярных координатах (r, φ) $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

б) Проверьте, что оператор Лапласа в пространстве $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ в сферических координатах (r, θ, φ) $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ x = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\theta,\varphi},$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

2. Докажите рекуррентные соотношения для функций Бесселя:

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}\,J_\nu(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x).$$

3. Докажите тождества $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)^m\frac{\sin x}{x},$$

$$J_{-m-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ x^{m+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)^m\frac{\cos x}{x}.$$

4. Докажите интегральное представление для функции Бесселя

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi + in\varphi}\,d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Вычислите интегралы

а) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}J_0(x)dx,\ a > 0;$ б) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}x^{\nu+1}J_\nu(x)dx,\ a > 0,\ \nu \geq 0.$

6. Найдите главный член асимптотики функций Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$ при $x \to +0$.