Семинар 5.

Задача 1. На евклидовой плоскости с координатами x, y дана окружность ω радиуса 1 с центром в точке $A = (0, 1)$. Верхняя точка $N = (0, 2)$ окружности ω называется ее *северным полюсом.* Рассмотрим ось абсцисс $l = OX$, касающуюся окружности ω в начале координат $O = (0, 0)$ и возьмем проективную прямую $\mathbb{P}^1$, получаемую из прямой l добавлением бесконечно удаленной точки. Отображение $p:\ \omega \smallsetminus \{N\} \to l,\ Y \mapsto NY \cap l$ называется *стереографической проекцией* окружности ω на прямую l из центра (северного полюса) N, а отображение $\varphi:\ \omega \to \omega,\ Y \mapsto Z$, где YZ - диаметр окружности ω, называется *антиподальным отображением* окружности ω в себя.

Рассмотрим отображение $f:\ l \smallsetminus \{O\} \to l$, представляющее собой композицию отображений $f = p \circ \varphi \circ p^{-1}$. Докажите, что f продолжается до инволюции $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и найдите формулу этой инволюции как дробно-линейного преобразования (в координате x на l).

Задача 2. 1) Докажите, совпадение определения двойного отношения $(ABCD)$ четырех различных точек $A,\ B,\ C,\ D$ на проективной прямой через $\frac{\lambda}{\mu}$ с определением через отношение определителей $\frac{|xz|}{|xw|}/\frac{|yz|}{|yw|}$ и с определением в аффинной карте как отношения $\frac{(a-c)}{(a-d)}/\frac{(b-c)}{(b-d)}$; эти определения были даны на семинаре 5.
2) Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных отображениях, т.е. если $f:\ \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}'^1$ - проективное отображение и $A,\ B,\ C,\ D$ - четыре различные точки на $\mathbb{P}^1$, то $(ABCD) = (f(A)f(B)f(C)f(D))$.

Задача 3. Пусть основное поле есть $\mathbb{C}$. Пусть $\lambda = (ABCD)$ - двойное отношение 4 точек, из которого перестановками этих точек получаются, включая λ, 6 чисел $\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ \frac{\lambda-1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{1}{1-\lambda}$. Нам уже известно такое число λ, для которого не все из указанных 6 чисел различны, – это число $\lambda = -1$. Существуют ли другие значения λ, для которых также не все из указанных 6 чисел различны? Если да, то найдите эти значения.

Задача 4. Пусть A и B – две различные точки на проективной прямой l, и пусть $f:\ l \to l$ – такое проективное преобразование, что $f(A) = B$ и $f(B) = A$. Докажите, что f – инволюция.