Семинар 7

Инвариантные пространства

1. Линейные операторы P_1, P_2 на векторном пространстве V удовлетворяют соотношениям $P_1 + P_2 = E$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$.

Доказать, что оба являются проекторами, и их образы дают разложение V в прямую сумму подпространств. Это можно естественно обобщить на случай n операторов. Как?

2. Доказать, что если оператор A обратим, то операторы A и A^{-1} имеют одни и те же инвариантные подпространства.

3. Доказать, что если два линейных оператора A и B на пространстве V перестановочны, то подпространства $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Im}A$ инвариантны относительно оператора B. Это же относится и к подпространству V_λ, состоящему из нуля и всех собственных векторов оператора A с собственным значением λ.

Одномерные инвариантные подпространства: собственные векторы, собственные значения (характеристические числа), характеристический многочлен $\chi_V(t)$ оператора A на пространстве V

4. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, который в некотором базисе задается матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Найти все собственные значения оператора $p(x) \to p(2x+1)$ в пространстве вещественных многочленов степени $\leq n$.

6. Доказать, что если подпространство U инвариантно относительно оператора A, то характеристический многочлен $\chi_V(t)$ делится на характеристический многочлен $\chi_U(t)$.

7. Доказать, что $\dim V_\lambda$ (см задачу 3) не больше кратности корня λ характеристического многочлена.

8. Характеристический многочлен оператора A равен $t^3 + t + 1$. Найти определитель оператора $A^3 - 6A^2 + 11A - 6$.

9. Доказать, что все собственные векторы оператора A с собственным значением λ являются собственными векторами оператора $p(A)$ с собственным значением $p(\lambda)$ (p(x) – многочлен).

10. Доказать, что для любого семейства попарно перестановочных линейных операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве V:

а) существует общий собственный вектор;

б)* существует базис, в котором все операторы семейства записываются верхнетреугольными матрицами.