Задачи для подготовки к контрольной № 1

Ал1◇1. Найдите все целые решения уравнений:
а) $2059x + 1769y = 58$ **б)** $1739x + 2701y = 74$.

ответ: (а) НОД коэффициентов $29 = -6 \cdot 2059 + 7 \cdot 1769$, решение $(61t_0 - 12,\ 14 - 71t_0)$, (б) НОД коэффициентов $37 = 14 \cdot 1739 - 9 \cdot 2701$, решение $(73t_0 + 28,\ -47t_0 - 18)$.

Ал1◇2. Найдите все целые решения уравнения $171x + 893y + 423z = -23$.

ответ: $(47t_0 - 253,\ -162t_0 + 9t_1 + 920,\ 323t_0 - 19t_1 - 1840)$.

Ал1◇3. Найдите все целые решения уравнения $117x + 403y + 279z = -8$.

ответ: $(31t_0 + 72,\ 243t_0 + 9t_1 + 544,\ -364t_0 - 13t_1 - 816)$.

Ал1◇4. Найдите наименьшее по модулю целое число с остатками 48, 53, 35 от деления на 51, 65, 43 соответственно.

ответ: -13467.

Ал1◇5. Найдите наименьшее по модулю целое число с остатками 60, 60, 42 от деления на 119, 143, 43 соответственно.

ответ: -238178.

Ал1◇6. Решите в $\mathbb{Z}/(799)$ уравнение $x^2 = 307$.

ответ: $799 = 17 \cdot 47$, $[307] = (1, 25)$, $(1, 0) = [188]$, $(0, 1) = [-187]$, решения $(\pm 1, \pm 5) = \{475, 747, 52, 324\}$.

Ал1◇7. Решите в $\mathbb{Z}/(553)$ уравнение $x^2 = 183$.

ответ: $553 = 7 \cdot 79$, $[183] = (1, 25)$, $(1, 0) = [-237]$, $(0, 1) = [238]$, решения $(\pm 1, \pm 5) = \{321, 153, 400, 232\}$.

Ал1◇8. Кубический полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ принимает значения

$$f(-1) = -54\,, \quad f(3) = 14\,, \quad f(5) = 0\,, \quad f(2) = 0\,.$$

Найдите остаток от деления f на $x^2 + x + 1$.

ответ: $f = -x^3 + 3x^2 + 18x - 40 \equiv 15x - 44 \pmod{x^2 + x + 1}$.

Ал1◇9. Кубический полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ принимает значения

$$f(1) = 0\,, \quad f(-3) = -84\,, \quad f(-4) = 0\,, \quad f(5) = -108\,.$$

Найдите остаток от деления f на $x^2 + x + 1$.

ответ: $f = -3x^3 + 3x^2 + 48x - 48 \equiv 45x - 54 \pmod{x^2 + x + 1}$.

Ал1◇10. Выясните, является ли кольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 4x^2 - x + 1)$ полем, и найдите в нём элемент $[x^2 + 3x - 1]^{-1}$, если таковой существует.

ответ: нод$(x^3 - 4x^2 - x + 1,\ x^2 + 3x - 1) = 1 = (x^3 - 4x^2 - x + 1) \cdot (\frac{7x}{9} + \frac{23}{9}) + (x^2 + 3x - 1) \cdot (-\frac{7x^2}{9} + \frac{26x}{9} + \frac{14}{9})$, откуда $[x^2 + 3x - 1]^{-1} = [-\frac{7x^2}{9} + \frac{26x}{9} + \frac{14}{9}]$.

Ал1◇11. Выясните, является ли кольцо $\mathbb{Q}[x]\,/\,(x^3 - 3x^2 - 3x + 1)$ полем, и найдите в нём элемент $[x^2 + 2x + 4]^{-1}$, если таковой существует.

ответ: нод$(x^3 - 3x^2 - 3x + 1,\ x^2 + 2x + 4) = 1 = (x^3 - 3x^2 - 3x + 1) \cdot (\frac{5}{117} - \frac{x}{117}) + (x^2 + 2x + 4) \cdot (\frac{x^2}{117} - \frac{10x}{117} + \frac{28}{117})$, откуда $[x^2 + 2x + 4]^{-1} = [\frac{x^2}{117} - \frac{10x}{117} + \frac{28}{117}]$.

Ал1◇12. Разложите на простые множители в $\mathbb{Z}[i]$:
а) 7344 **б)** 1368 **в)** 870 **г)** 2511

ответ: в (а) $(1+i)^4 \cdot (1-i)^4 \cdot 3^3 \cdot (4+i) \cdot (4-i)$, в (б) $(1+i)^3 \cdot (1-i)^3 \cdot 3^2 \cdot 19$, в (в) $(1+i) \cdot (1-i) \cdot 3 \cdot (2+i) \cdot (2-i) \cdot (5+2i) \cdot (5-2i)$, в (г) $3^4 \cdot 31$.

Ал1⋄13. Представьте натуральное число в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. Если такого представления нет, то объясните почему. Может ли таких представлений быть больше одного:

а) 3240 **б)** 13392 **в)** 11745

ответ: в (а) $3240 = (18)^2 + (54)^2$, в (б) нет , в (в) $11745 = (72)^2 + (81)^2 = (108)^2 + (9)^2$.

Ал1⋄14. Найдите в $\mathbb{Z}[i]$ нод$(4 + 7i, 11 + 16i)$.

ответ: нод$(4 + 7i, 11 + 16i) = 3 + 2i$.