Прикладные методы анализа – 2024
Листок 7

1. а) Докажите, что второй момент любого решения уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ на прямой

$$M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u(x,t)dx$$

линейно зависит от времени.

б) Найдите закон изменения во времени моментов порядка n:

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n u(x,t)dx.$$

2. а) Покажите, что задача Коши для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = a^2 u_{xx}, \quad u\Big|_{t=0} = u_0(x)$$

при $a \neq 0$ заменой

$$u = -2a^2 \frac{\varphi_x}{\varphi}$$

сводится к задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$\varphi_t = a^2 \varphi_{xx}, \quad \varphi\Big|_{t=0} = \exp\Big(-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u_0 d\xi\Big).$$

б) Что происходит при $a = 0$? Решите задачу Коши для уравнения $u_t + uu_x = 0$.

3. а) Докажите, что

$$(\partial_t - \partial_x^2)G_0(x,t) = \delta(t)\delta(x),$$

где

$$G_0(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

б) Докажите, что

$$\lim_{t\to+0} G_0(x,t) = \delta(x).$$

в) Докажите, что функция

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

решает неоднородное уравнение $u_t = u_{xx} + f(x,t)$, причем $\lim\limits_{t\to+0} u(x,t) = 0$.

4. Найдите решение уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ с начальным условием

$$u(x,0) = \begin{cases} T_1, & x < 0, \\ \\ T_2, & x > 0, \end{cases} \qquad\qquad 0 < T_1 < T_2.$$

5. а) Проверьте, что функция

$$G_0(z,\zeta;t) = \frac{1}{4\pi t}\, e^{-\frac{|z-\zeta|^2}{4t}}$$

решает уравнение теплопроводности на плоскости $u_t = \Delta u$.

б) Проверьте, что функция

$$G_0(\vec{x},\vec{y};t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d}\, e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4t}}$$

решает уравнение теплопроводности в d-мерном пространстве $u_t = \Delta u$.

6. Найдите тепловое ядро (функцию Грина) уравнения теплопроводности в верхней полуплоскости с нулевым граничным условием на вещественной оси.