Семинар 8

Полезные вещи

1. Если многочлены $P(X), Q(X)$ взаимно просты, то $\mathrm{Ker}(P(A)Q(A)) = \mathrm{Ker}P(A) \oplus \mathrm{Ker}Q(A)$ для любого линейного оператора A на пространстве V.

2. Доказать, что для каждого оператора A на комплексном векторном пространстве V существует максимальная цепочка вложенных A-инвариантных подпространств $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ (максимальность цепочки означает, что $\dim V_{i+1} - \dim V_i = 1$) (Совет: индукция по размерности. Удобно воспользоваться существованием собственного вектора у сопряженного оператора)

На языке матриц это означает возможность приведения матрицы оператора к треугольному виду.

3. Доказать, что диагональные элементы матрицы оператора в базисе треугольного представления являются собственными значениями, и каждое собственное значение встречается среди диагональных элементов столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена.

Отсюда, подключив простые топологические соображения, можно сделать полезный вывод: диагонализируемые операторы образуют всюду плотное множество в векторном пространстве всех линейных операторов на комплексном пространстве V.

На этом основан изящный способ перенесения свойств, установленных для диагонализируемых операторов, на все операторы путем предельного перехода.

4^*. Доказать, что любой линейный оператор на комплексном векторном пространстве аннулируется своим характеристическим многочленом. Факт, верный для любого поля.

Циклическое A-подпространство, порожденное вектором. Теорема Гамильтона-Кэли

5. Пусть A – оператор на векторном пространстве V и $v \in V$. Аннулятором вектора v назовем такой многочлен $P(X)$,что $P(A)v = 0$, и минимальным аннулятором – аннулятор минимальной степени. Доказать, что если степень минимального аннулятора вектора v равна m, то семейство $v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v$ независимо, а линейная оболочка этого семейства A-инвариантна. Записать матрицу оператора A на построенном инвариантном подпространстве в базисе $v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v$.

6. Вычислить характеристический многочлен оператора A на циклическом подпространстве задачи 5.

7^*. Доказать теорему Гамильтона-Кэли.

8. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ – различные собственные значения оператора A. Доказать, что для диагонализируемости оператора необходимо и достаточно, чтобы многочлен $(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_s)$ был минимальным многочленом оператора.

9^*. Доказать, что характеристические многочлены операторов AB и BA совпадают.