## Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Осень 2024.

## Задания с 4 занятия.

**ВНИМАНИЕ!** Следующее занятие будет 01.11.2024, т.е. сразу после зачетной недели!

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии после зачетной недели. Поскольку перерыв между занятиями больше обычного, в задачах появляются некоторые новые понятия и идеи, которые будут более подробно обсуждаться на предстоящей лекции.

(1) Покажите, что кольцо регулярных функций на особой поверхности, заданной в трехмерном аффинном пространстве $\mathbb{A}^3$ уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, целозамкнуто.

(2) Пусть $f : X \to Y$ регулярное отображение аффинных алгебраических многообразий, $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ — соответствующий гомоморфизм алгебр регулярных функций, $Z \subset X$ — собственное замкнутое подмножество в $X$, идеал $I_Z \subset \mathbb{K}[X]$ состоит из всех регулярных функций на $X$, обращающихся в нуль на $Z$.

а) Пусть $Z = \{a\}$, где $a \in X$, тогда $I_Z = m_a$ — максимальный идеал точки $a$. Покажите, что идеал $(f^*)^{-1}(m_a)$ максимален и совпадает с идеалом $m_{f(a)} \subset \mathbb{K}[Y]$.

б) Приведите пример, когда $f(Z)$ не замкнуто в $Y$.

в) Как в общем случае связаны идеал $(f^*)^{-1}(I_Z) \subset \mathbb{K}[Y]$ и множество $f(Z) \subset Y$?

г) Докажите, что если отображение $f$ конечно, то $f(Z)$ всегда замкнуто в $Y$.

(3) На лекциях было дано определение того, когда регулярное отображение аффинных алгебраических многообразий является бирациональным изоморфизмом. В этой задаче объясняется, как распространить понятие бирационального изоморфизма на более широкий класс рациональных отображений (определения см ниже), что, в частности, позволяет обсуждать их категорные свойства и рассматривать группу бирациональных автоморфизмов многообразия.

а) Пусть $f : X \to Y$ регулярное отображение, являющееся бирациональным изоморфизмом. (Напомним, что согласно данному в лекциях определению это означает, что отображение колец регулярных функций $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ порождает изоморфизм их полей частных $\mathbb{K}(Y)$ и $\mathbb{K}(X)$.) Покажите, что существуют такие главные открытые подмножества $U_\varphi \subset X$ и $V_\psi \subset Y$, что ограничение $f$ на $U_\varphi$ является изоморфизмом между $U_\varphi$ и $V_\psi$.

б) Пусть $X$ и $Y$ неприводимые аффинные алгебраические многообразия, и $Y \subset A^m$. Определим **рациональное** отображение $f : X \to Y$ по аналогии с имеющимся определением регулярного отображения: $f$ называется **рациональным** отображением, если существуют такие рациональные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ($\varphi_i \in \mathbb{K}(X)$, $i = 1, \ldots, m$), что для любой точки $a$ из их общей области определения (заметим, что их общая область определения это открытое подмножество $U \subset X$) точка аффинного пространства $(\varphi_1(a); \ldots; \varphi_m(a))$ лежит в $Y$. Эту точку мы, конечно, будем обозначать $f(a)$, а множество всех таких точек при $a \in U$ через $f(U)$; допуская некоторую вольность речи мы также будем обозначать это множество через $f(X)$, невзирая на то, что, строго говоря, $f$ определено не на всех точках $X$.

Покажите, что если $f(X)$ плотно в $Y$, то для любой регулярной функции $h \in \mathbb{K}[Y]$ функция $h \circ f$ является рациональной функцией на $X$, и тем самым получается гомоморфизм $\mathbb{K}$-алгебр $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}(X)$, который продолжается до вложения поля $\mathbb{K}(Y)$ в поле $\mathbb{K}(X)$ (это вложение также обозначатся $f^*$). Покажите, что и наоборот, любое гомоморфное вложение поля $\mathbb{K}(Y)$ в поле $\mathbb{K}(X)$ (как алгебр над $\mathbb{K}$) получается из некоторого рационального отображения $f : X \to Y$.

в) Покажите, что если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — рациональные отображения неприводимых аффинных алгебраических многообразий и $f(X)$ плотно в $Y$, то можно определить их композицию (как?), которая также будет рациональным отображением $g \circ f : X \to Z$, причем в случае, когда $f(Y)$ плотно в $Z$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

г) Рациональное отображение неприводимых аффинных алгебраических многообразий $f : X \to Y$ называется **бирациональным изоморфизмом**, если $f^* : \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ — изоморфизм полей. Покажите, что в этом случае существует такое рациональное отображение $g : Y \to X$, что изоморфизмы полей $f^*$ и $g^*$ являются взаимно обратными. Покажите также, что композиция двух рациональных отображений, являющихся бирациональными изоморфизмами, также является бирациональным изоморфизмом.

д) Покажите, что если рациональное отображение $f$ является бирациональным изоморфизмом, то, как и в пункте а), существуют такие главные открытые подмножества $U_\varphi \subset X$ и $V_\psi \subset Y$, что ограничение $f$ на $U_\varphi$ является изоморфизмом между $U_\varphi$ и $V_\psi$. Покажите, что и наоборот, любой изоморфизм между двумя главными открытыми подмножествами $U_\varphi \subset X$ и $V_\psi \subset Y$ получается таким образом из некоторого рационального отображения $f : X \to Y$, являющегося бирациональным изоморфизмом.