Две красивые задачи

А. (0.1 + 0.1) Дана действительнозначная случайная величина ξ. Предъявите функцию G такую, что случайная величина $G(\eta)$, где η имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, имеет такое же распределение как и ξ, если

1. случайная величина ξ непрерывна;
2. решите задачу в общем случае.

Указание: для построения G используйте функцию распределения F_ξ случайной величины ξ.
Комментарий: эта задача показывает, что, имея генератор случайных чисел на $[0, 1]$, мы можем построить любое наперед заданное распределение. А также, что любое распределение на $\mathbb{R}$ можно реализовать случайной величиной на вероятностном пространстве $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), Leb)$. Действительно, случайная величина η реализуется тривиальным образом: $\eta(\omega) = \omega$. А значит реализуется и случайная величина $G(\eta)$, имеющая требуемое распределение. В этом смысле другие вероятностные пространства не нужны.

Б. (0.2) Пусть $\phi(n)$ — функция Эйлера, равная количеству чисел m, $1 \leq m \leq n$, взаимно простых с n. Докажите формулу Эйлера, используя вероятностные соображения:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

где произведение берется по всем простым числам p, делящим n.

Указание: рассмотрите вероятностное распределение на $\{1, \dots, n\}$ такое, что вероятность каждого k составляет $1/n$. Для простых чисел p, делящих n, рассмотрите события $A_p = \{k \leq n : p|k\}$. Вычислите их вероятности. Как эти события связаны между собой? Свяжите функцию Эйлера с множествами A_p.

Измеримость и условные математические ожидания

Измеримость относительно разбиения

Напомним, что полной группой событий или разбиением вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется семейство $\mathfrak{D}$ попарно несовместных событий $D_t \in \mathcal{A}$ такое, что $\bigcup_t D_t = \Omega$. Ниже всегда предполагается, что разбиение состоит лишь из конечного числа событий, каждое из которых имеет ненулевую вероятность.

Далее мы будем рассматривать только простые случайные величины, принимающие конечное число значений, то есть имеющие вид

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{1}_{F_k}(\omega), \qquad n \geq 1, \qquad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j, \tag{1}$$

где семейство $\{F_k, 1 \leq k \leq n\}$ образует разбиение вероятностного пространства. В соответствии с заявленным выше, для удобства будем считать, что вероятности всех значений отличны от нуля, то есть $\mathbb{P}(F_k) \neq 0$ для всех k. Такое разбиение называется *разбиением, порожденным с.в.* ξ, и далее будет обозначаться $\mathfrak{F}_\xi$.

Случайная величина ξ называется *измеримой относительно разбиения* $\mathfrak{D}$, если на каждом событии $D_k \in \mathfrak{D}$ разбиения она принимает постоянное значение y_k (для разных событий $D_i \in \mathfrak{D}$ эти значения могут совпадать), то есть имеет место представление:

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{m} y_k \mathbf{1}_{D_k}(\omega).$$

В этом случае разбиение $\mathfrak{D}$ обязано являться «измельчением» разбиения $\mathfrak{F}_\xi$.

Ясно, что если с.в. η измерима относительно разбиения $\mathfrak{F}_\xi$, то она представляется в виде $\eta = f(\xi)$. Функция f удовлетворяет соотношениям $f(x_k) = \eta(F_k)$, где x_k определены в (1).

Условная вероятность события относительно разбиения

Для события $A \in \mathcal{A}$ и разбиения $\mathfrak{D}$ возникает набор условных вероятностей $P(A|D_i)$, из них построим новую *простую случайную величину*

$$\mathcal{P}(A|\mathfrak{D})(\omega) = \sum_j P(A|D_j)\mathbf{1}_{D_j}(\omega)$$

которая называется **условной вероятностью события A относительно разбиения $\mathfrak{D}$**. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_\eta$, то случайная величина $\mathcal{P}(A|\mathfrak{F}_\eta)$ называется *условной вероятностью события A относительно с.в η* и обозначается $\mathcal{P}(A|\eta)$.

Условные математические ожидания

Условное относительно события мат.ожидание Пусть A — событие ненулевой вероятности $A \subset \Omega$. *Условным математическим ожиданием $\mathbb{E}(\xi|A)$ с.в. ξ вида* (1) *относительно события A* называется мат.ожидание ξ относительно условной вероятности $\mathbb{P}(\cdot|A)$,

$$\mathbb{E}(\xi|A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}(\cdot|A)}(\xi) = \sum_k x_k P(F_k|A).$$

Нетрудно видеть, что $\mathbb{E}(\xi|A) = \dfrac{\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbf{1}_A)}{\mathbb{P}(A)}$.

Условное относительно разбиения мат.ожидание *Условным математическим ожиданием $\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{D})$ с.в. ξ относительно разбиения $\mathfrak{D}$* (соответственно, когда $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}_\eta$, условным математическим ожиданием $\mathcal{E}(\xi|\eta)$ относительно с.в η) называется случайная величина

$$\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{D})(\omega) = \sum_k \mathbb{E}(\xi|D_k)\mathbf{1}_{D_k}(\omega)$$

Важное замечание Условное математическое ожидание $\mathcal{E}(\xi|\eta)$ относительно с.в η измеримо относительно разбиения $\mathfrak{F}_\eta$, а значит, представляется в виде $\mathcal{E}(\xi|\eta) = f(\eta)$. Действительно, на элементах разбиения $\mathfrak{F}_\eta$ оно, по определению, принимает постоянные значения.

Еще одно Определения выше очевидным образом (сделайте это!) обобщаются до условного математического ожидания при условии не одной с.в. η, но целой системы случайных величин $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_N$ в том смысле, что соответствующее необходимое разбиение строится при помощи всех разбиений $\mathfrak{F}_{\eta_k}$.

Задачи: свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{E}$

В этом параграфе предлагается *систематически* использовать, что для всякого события A ненулевой вероятности условная вероятность $\mathbb{P}(\cdot|A)$ —- тоже вероятностная мера, обладающая всеми свойствами обычной вероятности. Аналогично, условное матожидание $\mathbb{E}(\cdot|A)$ является самым обычным матожиданием относительно вероятности $\mathbb{P}(\cdot|A)$. Это избавит вас от массы вычислений.

1. (0.1) Пусть ξ, η одинаково распределенные и независимые с.в. принимающие значения $\{0, 1\}$, найдите условную вероятность $\mathcal{P}(\xi + \eta = 1|\eta)$.
2. (0.1) Покажите, что $\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{D}) = \sum_k x_k \mathcal{P}(F_k|\mathfrak{D})$, если ξ имеет вид (1).
3. (0.3 если решены все задачи, 0.0 иначе) Проверьте следующие простейшие свойства условного математического ожидания и вероятности:
   (a) Для $\xi = \mathbf{1}_A$ выполнено $\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{D}) = \mathcal{P}(A|\mathfrak{D})$.
   (b) Проверьте, что условное математическое ожидание случайной величины η относительно порожденного ею разбиения $\mathfrak{F}_\eta$ совпадает с этой случайной величиной: $\mathcal{E}(\eta|\mathfrak{F}_\eta) = \eta$, другими словами, $\mathcal{E}(\eta|\eta) = \eta$
   (c) Проверить $\mathcal{E}\left(a \cdot \alpha + b \cdot \beta|\mathfrak{F}\right) = a \cdot \mathcal{E}\left(\alpha|\mathfrak{F}\right) + b \cdot \mathcal{E}\left(\beta|\mathfrak{F}\right)$, где a, b — константы.
   (d) Проверить $\mathcal{P}(A \cup B|\mathfrak{D}) = \mathcal{P}(A|\mathfrak{D}) + \mathcal{P}(B|\mathfrak{D})$, для всех непересекающихся A, B.
   (e) $\mathcal{E}(\text{const}|\mathfrak{D}) = \text{const}$

(f) Если $\forall i, k$ события $D_i \in \mathfrak{D}$ и $\{\xi = x_k\}$ независимы, то $\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{D}) = \mathbb{E}(\xi)$

(g) Если ξ, η независимы, то $\mathcal{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\xi)$

4. (0.1) Доказать: $\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{D})\right) = \mathbb{E}(\xi)$ и $\mathbb{E}(\mathcal{P}(A|\mathfrak{D})) = P(A)$.

5. (0.1) Для двух простых случайных величин ξ, η их произведение $\xi\eta$ — также простая с.в. и разбиение, ею порожденное, очевидно таково, что обе с.в. ξ, η измеримы относительно него: действительно, оно состоит из событий вида $D_i F_j$, $D_j \in \mathfrak{D}_\xi$, $F_i \in \mathfrak{F}_\eta$ и $\xi\eta = \sum_{i,j} x_j y_i \mathbf{1}_{D_j \cap F_i}$.

   Пусть с.в. η $\mathfrak{F}$- измерима, тогда $\mathcal{E}(\xi\eta|\mathfrak{F}) = \eta\mathcal{E}(\xi|\mathfrak{F})$.

6. Докажите, что для всякой функции $f(\eta)$ выполнено $\mathbb{E}\left(\xi f(\eta)\right) = \mathbb{E}\left[f(\eta)\mathcal{E}(\xi|\eta)\right]$.

7. (0.2 + 0.1) **Геометрический смысл условного матожидания**;

   (a) Докажите, что случайная величина $\xi - \mathcal{E}(\xi|\eta)$ ортогональна в $L_2(\Omega, \mathbb{P})$ любой случайной величине α, измеримой относительно разбиения $\mathfrak{F}_\eta$ (то есть, имеющей вид $\alpha = f(\eta)$). Другими словами,

   $$\mathbb{E}\Big(f(\eta)\big(\xi - \mathcal{E}(\xi|\eta)\big)\Big) = 0.$$

   Так как с.в. $\mathcal{E}(\xi|\eta)$ измерима относительно $\mathfrak{F}_\eta$, это означает, что $\mathcal{E}(\xi|\eta)$ — **ортогональная проекция** с.в. ξ в $L_2(\Omega, \mathbb{P})$ на подпространство, состоящее из $\mathfrak{F}_\eta$-измеримых случайных величин α.

   (b) Пусть с.в. α — F_η-измерима. Докажите, что минимум по α выражения[1] $\mathbb{E}\left[(\alpha - \xi)^2\right]$ достигается в случае, когда $\alpha = \mathcal{E}(\xi|\eta)$.

Информация: приложения

1) Условная вероятность и матожидание – ключевые инструменты для работы с марковскими случайными процессами. Те, кто брал курс марковских цепей, знают, что условная вероятность в них играет ключевую роль. Для случайных же процессов ситуация аналогична, но пространство состояний в них как правило непрерывно, и поэтому техника становится сложнее: приходится работать с условными матожиданиями относительно сигма-алгебр. Этот листок призван дать представление о них в дискретном случае (где вместо сигма-алгебр конечные разбиения), а в непрервыном они чуть-чуть обсуждаются в следующем параграфе. Более детально мы надеемся обсудить их в конце семестра.

2) А сейчас приведем пример как условное матожидание используется в задаче регрессии, пояснение см. Рис.1. Пусть случайные величины ξ и η связаны функциональным соотношением $\xi = f(\eta)$. На практике, мы обычно не можем точно наблюдать случайный вектор (ξ, η), а вместо него наблюдаем случайный вектор $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ с ошибкой, так что

$$\tilde{\xi} = f(\tilde{\eta}) + \varepsilon,$$

где случайная величина ε предполагается независимой от $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$, и имеющей нулевое среднее $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ (на практике ε мала). Задача состоит в нахождении функции f (если она известна, то, зная η, мы сможем прогнозировать ξ.) Беря условное матожидание относительно $\tilde{\eta}$, мы получаем

$$\mathcal{E}(\tilde{\xi}|\tilde{\eta}) = \mathcal{E}(f(\tilde{\eta})|\tilde{\eta}) + \mathcal{E}(\varepsilon|\tilde{\eta}).$$

Согласно задаче 5, $\mathcal{E}(f(\tilde{\eta})|\tilde{\eta}) = f(\tilde{\eta})$. Согласно задаче 3g, $\mathcal{E}(\varepsilon|\tilde{\eta}) = \mathbb{E}\varepsilon = 0$. Значит,

$$f(x) = \mathcal{E}(\tilde{\xi}|\tilde{\eta} = x).$$

Информация: условное математическое ожидание в общем случае

Если все пойдет по плану, то этот материал будет подробно обсуждаться в самом конце семестра.

Существование условного математического ожидания $\mathcal{E}(\eta|\xi)$ для пары общих случайных величин обычно объясняют при помощи теоремы Радона-Никодима (также теоремы существования) в теории меры. В полной общности это понятие требует расширения понятия случайных величин, поэтому лишь коснемся его для общей информации.

[1] по смыслу это квадрат «расстояния между с.в.»

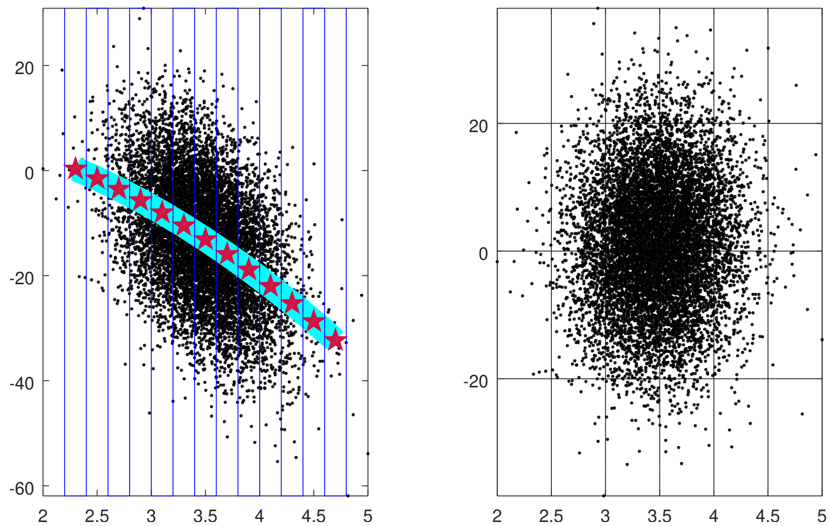

Рис. 1: Поясняющая картинка: симуляция значений случайного вектора $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ и аппроксимация функции регрессии. Слева: точки отвечают выборке значений случайного вектора, вертикальные линии задают события $C_i = \{x_i \leqslant \tilde{\eta} < x_{i+1}\}$, звездочками отмечены значения математических ожиданий $\mathbb{E}(\tilde{\xi}|C_i)$, сплошная жирная светлая линия – функция $f(x)$. Справа: значения разностей $\tilde{\xi} - f(\tilde{\eta})$

Пусть $\Omega, \mathcal{B}, P$ — вероятностное пространство и задана σ-подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ такая, что некоторая случайная величина ξ не обязательно измерима относительно $\mathcal{A}$. В теории вероятностей рассматривают в основном случай, когда $\mathcal{A}$ порождается прообразами (борелевских множеств $\mathbb{R}$) одной или нескольких случайных величин (так же, как в дискретном случае все строилось на основе разбиений).

шаг 1 Условным математическим ожиданием $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{A})$ неотрицательной случайной величины ξ относительно $\mathcal{A}$ называется (вообще говоря расширенная, то есть принимающая и значения в $\pm\infty$) измеримая относительно $\mathcal{A}$, случайная величина такая, что $\forall A \in \mathcal{A}$ совпадают интегралы по мере $\mathbb{P}$:

$$\int_A \xi \, d\mathbb{P} = \int_A \mathcal{E}(\xi|\mathcal{A}) \, d\mathbb{P}$$

Разумеется $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{A})$ определена лишь с точностью до множества нулевой меры.

шаг 2 Для произвольной с.в. ξ условное математическое ожидание $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{A})$ считается определенным, если оба условных математических ожидания для случайных величин $\xi^+ = \xi \cdot \mathbf{1}_{\{\xi \geqslant 0\}}$ и $\xi^- = \xi \cdot \mathbf{1}_{\{\xi < 0\}} \cdot (-1)$ корректно определены и тогда $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{A}) = \mathcal{E}(\xi^+|\mathcal{A}) - \mathcal{E}(\xi^-|\mathcal{A})$.

Вместо того, чтобы выводить здесь из одной теоремы существования (теоремы Радона-Никодима) теорему существования условного мат.ожидания $\mathcal{E}(\xi|\mathcal{A})$, для частного случая двух абсолютно непрерывных случайных величин рассмотрим более-менее явную конструкцию, повторяющую в основном знакомые построения для дискретных случайных величин. Итак, для абсолютно непрерывного случайного вектора (ξ, η) *т.е. пары непрерывных случайных величин* с двумерной плотностью распределения $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$ сначала определим для аргументов $\{y|f_\eta(y) \neq 0\}$ число $\mathbb{E}(\xi|\eta = y)$ формулой

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = y) = \frac{1}{f_\eta(y)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\{\xi,\eta\}}(x, y) dx$$

Далее для каждого $\omega \in \Omega$ положим

$$\mathcal{E}\left(\xi \middle| \eta\right)(\omega) = \begin{cases} 0, & f_\eta(\eta(\omega)) = 0 \\ \mathbb{E}(\xi|\eta = \eta(\omega)), & f_\eta(\eta(\omega)) \neq 0 \end{cases}$$

Если распределения простых случайных величин и векторов интерпретировать с использованием понятия обобщенной плотности (то есть δ-функций), то легко видеть, что эти построения для абсолютно непрерывного случая следуют приведенной ранее дискретной конструкции с разбиениями.