Семинар 9

Минимальный многочлен m_A оператора A

1. Написать минимальный многочлен оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени $\leq n$.

2. Написать минимальный многочлен оператора сдвига аргумента на единицу в пространстве многочленов степени $\leq n$.

3. Верно ли следующее утверждение: оператор диагонализируем, если степень его минимального многочлена равна размерности пространства, на котором он действует.

4. Пусть A и B – линейные операторы, а p(t) – такой многочлен, что $p(AB) = 0$. Доказать, что многочлен $tp(t)$ аннулирует оператор BA, и на основании этого сделать правильный вывод о связи минимальных многочленов операторов AB и BA.

5. Линейный оператор обратим тогда и только тогда, когда $m_A(0) \neq 0$. Доказать.

Диагонализуемость

6. Диагонализуемость наследуется в том смысле, что если оператор A диагонализуем на пространстве V, то этим же свойством обладает его сужение на любое A-инвариантное подпространство. Доказать.

7. Два диагонализуемых оператора тогда и только тогда диагонализуемы одновременно, когда они перестановочны. Доказать. (Факт, верный для любого семейства диагонализуемых операторов)

8. Укажите матрицу, которая трансформирует матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду и укажите этот вид.

ЖНФ 1

9. Объясните следующие факты:

а) число жордановых клеток оператора A, отвечающих какому-то одному собственному значению λ, равно размерности пространства V_λ;

б) Порядок наибольшей жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ, равна кратности λ как корня минимального многочлена m_A.

10*. Ранги операторов $(A - \lambda E)^l$ однозначно определяют строение жорданова блока, отвечающего собственному значению λ. Объясните, как они это делают.