Домашнее задание 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Срок сдачи: 29 ноября 23:59 по Московскому времени

Минимум из количества сданных задач и 10 равняется оценке за листок. Для того, чтобы задача была засчитана полностью, нужно сдать все пункты. Задачи 1,2, 5-8 сдаются устно, остальные письменно.

1. Докажите следующие свойства o-малого:

(1) если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, то $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$;

пусть на некоторой проколотой окрестности точки a определены функции f и g, тогда при $x\to a$ верно, что:

(2) $o(c(f(x)))=o(f(x))$, где $c\in\mathbb{R}$;
(3) $o(f(x))\pm o(f(x))=o(f(x))$;
(4) $o(f(x))\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x))$;
(5) $o(f(x)+o(f(x)))=o(f(x))$;
(6) $|o(f(x))|^p=o(|f(x)|^p)$, $p>0$;

пусть $m,n\in\mathbb{N}$ и $x\to 0$, тогда верно, что:

(7) $x^{n+1}=o(x^n)$;
(8) $o(x^m)=o(x^n),\ m\geqslant n$;
(9) $x^m\cdot o(x^n)=o(x^{n+m})$;
(10) $o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{n+m})$;
(11) $(o(x^n))^m=o(x^{nm})$;
(12) $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^{\min\{m;n\}})$.

2. Докажите следующие свойства O-большого:
пусть на некоторой проколотой окрестности точки a определены функции f и g, тогда при $x\to a$ верно, что:

(1) $O(c(f(x)))=O(f(x))$, где $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;
(2) $O(f(x))\pm O(f(x))=O(f(x))$;
(3) $O(f(x))\cdot O(g(x))=O(f(x)\cdot g(x))$;
(4) $o(f(x))\cdot O(g(x))=o(f(x)\cdot g(x))$;
(5) $o(O(f(x)))=o(f(x)),\ O(o(f(x)))=o(f(x)),\ O(O(f(x)))=O(f(x))$;
(6) $|O(f(x))|^p=O(|f(x)|^p)$, $p>0$;

3. При каких a,b справедливы равенства

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-ax-b)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+2x^3}-cx^2-ax-b)=0?$$

4. Вычислите пределы

$$\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^N-N}{x-1},\quad \lim_{x\to2}\frac{x^3-12x+16}{x^2-4},\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}),\quad \lim_{x\to0}\frac{x^3}{\ln(1-2x)+2x+2x^2},\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin^3x}{\sqrt{1+4x^2}-e^{2x}+2x},$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}(\pi x)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x(1-\cos(2x))},\quad \lim_{x\to0}\frac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg}x}{\arcsin(2x^2)}.$$

5. Исследовать на непрерывность следующие функции:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n+1},\quad g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+(\sin x)^{2n}}.$$

6. Пусть функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна и множество $f(\mathbb{Q})$ ограничено. Ограничено ли множество $f(\mathbb{R})$?

7. Докажите, что функция f непрерывна на прямой тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества U множество $f^{-1}(U)$ также открыто.

8. Существует ли непрерывная функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, принимающая каждое значение ровно два раза?

9. Докажите неравенства

1) $x^\alpha-1\geqslant\alpha(x-1)$ при $x\geqslant 1,\alpha\geqslant 2$, 2) $(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}\geqslant(x^\beta+y^\beta)^{1/\beta}$ при $x>0,y>0,0<\alpha<\beta$.

10. Найти первые производные следующих функций:

$$\frac{1-x^2}{x}\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}},\quad x-3\ln\left((1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}\right)-3\operatorname{arctg}e^{x/6},\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\frac{\operatorname{sh}x}{4\operatorname{ch}^4x}+\frac{3\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x),\quad \frac{1}{4}\ln|\operatorname{th}\frac{x}{2}|-\frac{1}{4}\ln\frac{3+\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x},\quad (\cos 2x)^{(\ln\cos 2x)/4},$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}{\operatorname{tg}x-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+1}}.$$

11. Составить уравнение касательной и нормали кривой

a) $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=3$;

b) $y=2x+\dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=1$;

b) $\begin{cases}x(t)=a(t-\sin t),\\ y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}$ в точке со значением параметра $t_0=\pi/3$.