Теория вероятностей 2024. Задачи 6
Характеристики случайных величин.

1. В коробке лежат 7 красных и 5 белых шаров. Случайным образом из коробки вынимают два шара. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа вынутых красных шаров. Изменится ли ответ, если вынимать шары следующим образом: вытащили первый шар, положили обратно, а затем вытащили второй шар?

2. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Вычислите $\mathbb{E}[X^n]$ для $n \in \mathbb{N}$.

3. Пусть плотность совместного распределения случайных величин ξ, η равна $p_{\xi,\eta}(x,y) = C \exp(-x^2 + 2xy - 2y^2)$. Найдите константу C и $\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.

4. Случайная величина X имеет пуассоновское распределение с параметром λ_1, случайная величина Y распределена экспоненциально с параметром λ_2, причем X и Y независимы. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $X + Y$, XY.

5. Вычислите $\mathbb{E}\xi^2$, если

$$(1) \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1, \\ 1/3, & \text{при } -1 \le x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{при } x \ge 0. \end{cases}$$

   (2) А если $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$ при $x \ge 0$?

6. Пусть η и $\xi_0, \xi_1, \dots$ — независимые случайные величины, принимающие значения $0, 1, 2, \dots$, причем ξ_j имеют одинаковые распределения. Рассмотрим случайную величину $\beta = \sum_{j=1}^{\eta} \xi_j$. Докажите следующее соотношение между производящими функциями: $Q_\beta = Q_\eta \circ Q_\xi$.

7. Задана бесконечная i.i.d. последовательность индикаторов $\{\xi_i\}$,$i = 0, 1 \dots$ с параметром $p = 1/3$, случайная величина $\beta \sim Poisson(1)$ независима с этими индикаторами. Найти $\mathbb{E}(\alpha)$ дискретной случайной величины $\alpha = \sum_{k=1}^{\beta} \xi_k$.

8. Два преподавателя читают теорию вероятностей. Первый уже знает, что в его классе n студентов. Другой, однако, еще не провел первое занятие, поэтому он считает, что количество N его студентов – случайная величина с матожиданием равным n.
   Планируется провести экзамен, вероятность успешной сдачи которого равна $p \in (0, 1)$ для каждого студента (независимо от других студентов и от N). В каком классе наибольшее ожидаемое число тех студентов, которые успешно сдадут экзамен? В каком классе набольшая дисперсия числа студентов, которые сдадут экзамен?

9. $n = 100$ писем случайным образом разложили по n конвертам, на которых уже были написаны адреса. Найдите математическое ожидание и дисперсию количества писем, попавших в конверты с правильными адресами.

10. Приведите пример зависимых случайных величин с нулевой ковариацией.

11. Пусть ξ распределена по закону Коши с плотностью $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Найдите квантиль $q_{2/3}$ для $|\xi|$.

12. Пусть X - случайная величина. Докажите следующие утверждения.
    (a) Если $X \in L^1$, то медиана m минимизирует функцию $\phi_1(r) = \mathbb{E}[|X - r|]$.
    (b) Если $X \in L^2$, то математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$ минимизирует функцию $\phi_2(r) = \mathbb{E}[|X - r|^2]$.
    (c) Используйте (a) и неравенство Йенсена, чтобы доказать, что $|m - \mathbb{E}[X]|^2 \le \mathrm{Var}\, X$.

13. Пусть случайная величина ξ удовлетворяет $\xi \in L_1(\Omega, \mathbb{P})$ и
(a) $\xi = 0, 1, \ldots$. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq n)$.
(b) $\xi \geq 0$. Докажите, что $\mathbb{E}\xi = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi \geq x)\, dx$.
Кроме того, $\mathbb{E}\xi = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi > x)\, dx = \int_0^{\infty} (1 - F_\xi(x))\, dx$.

14. * Найдите матожидание и дисперсию $\max(X, Y)$, где X, Y — случайные величины из задачи (4).

15. * $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность длины 1. Пусть $I_0 = [0, 1/n] \subset S^1$ и $I_k = \frac{k}{n} + I_0 = [k/n, (k+1)/n]$, $k = 1, \ldots, n-1$. тогда $|I_0| = 1/n$ и $|\cup_{i=0}^{n-1} I_k| = 1$. Таким образом, мы построили n сдвигов множества I_0 таких, что их объединение имеет полную меру.
Однако, в общем случае мы имеем иную картину. Для $E \subset S^1$ и $x \in S^1$ положим $x + E := \{x + y, y \in E\}$. Пусть множество E измеримо и $n \geq 1$. Докажите, что существуют $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $|\cup_{i=1}^{n} (x_i + E)| \geq 1 - (1 - |E|)^n$.

16. * [обобщение задачи 13] Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, ξ — случайная величина и $f(\xi) \in L_1$. Докажите, что $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}f(\xi) = f(a) + \int_a^{\infty} f'(x)\mathbb{P}(\xi \geq x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f'(x)\mathbb{P}(\xi \geq x)\, dx.$$

17. * Пусть E - упорядоченное измеримое пространство. Пусть $X\colon \Omega \to E$ - случайная величина. Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ - измеримые монотонные функции. Докажите, что

$$\mathbb{E}[f(X)\, g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)].$$

18. * Пусть случайные величины ξ, η удовлетворяют $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, а $\operatorname{Var}\xi = \operatorname{Var}\eta = 1$ и имеют коэффициент корреляции ρ. Докажите, что

$$\mathbb{E}\max(\xi^2, \eta^2) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

19. * Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — iid, $\xi_j \sim Uniform([0, 1])$. Пусть ν — случайная величина, равное минимальному k, при котором $\sum_{i=1}^{k} \xi_i \geq 1$. Найдите $\mathbb{E}\nu$.

20. У вас есть час на дневной сон, но вы ждете два сообщения и не отключаете телефон. От сообщений вы просыпаетесь. Считая, что времена прихода сообщений независимы и равномерно распределены в течение этого часа, сколько в среднем вам останется спать после их прихода?