Вопросы экзамена

1. Случайная величина ξ непрерывна, функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Охарактеризовать случайную величину $g(\xi)$: может ли она быть дискретной, непрерывной, смешаной, сингулярной?.
2. Рассмотрим вероятностное пространство Ω для *бесконечного* числа испытаний идеальной монеты. Объяснить как устроена случайная величина $\Omega \to \mathbb{R}$ соответствующая описанию «число выпавших решек до первого герба».
3. На вероятностном пространстве $[0, 1$ с обычной мерой (порожденной длинами) явно построить двадцать попарно независимых случайных величин.
4. Функции распределения $F_\xi(x) = F_\eta(x)$ непрерывны и при $\forall x \in [2, 3]$ не равны нулю. Возможно ли, чтобы $F_{\xi+\eta}(x) \equiv 0\ \forall x \in [2, 3]$?
5. Функции распределения $F_\xi(x) = F_\eta(x)$ непрерывны и при $\forall x \in [0, 1]$ не равны нулю. Возможно ли, чтобы $F_{\xi\eta}(x) \equiv 0\ \forall x \in [0, 1]$?
6. Сформулировать ЗБЧ в форме Чебышева и построить пример последовательности случайных величин к которой ЗБЧ применим.
7. Построить пример последовательности имеющих первые и вторые моменты случайных величин для которой вероятность отклонения $\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$ больше, чем на $\frac{1}{2}$ от $\frac{E\xi_1+E\xi_2+\ldots+E\xi_n}{n}$ при $n \to \infty$ возрастает.
8. Верно ли, что для последовательности зависимых случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ с конечными дисперсиями и $E\xi_i = a$ выполнен ЗБЧ? Доказать или опровергнуть.
9. Случайная величина имеет все нечетные абсолютные моменты, что можно сказать о существовании четных моментов?
10. Случайная величина ξ непрерывна, случайная величина η дискретна. Верно ли, что случайная величина $\xi + \eta$ всегда непрерывна?
11. Для двух неотрицательных непрерывных случайных величин α и β и неотрицательной константы C выполняются $P(\alpha < C) > 0$ и $P(\beta < C) > 0$. Верно ли, что $P(\alpha + \beta < C) > 0$? Доказать или опровергнуть.
12. Случайная величина ξ непрерывна, независимая от ξ случайная величина η дискретна. Верно ли, что случайная величина $\xi + \eta$ всегда непрерывна? Доказать или опровергнуть.
13. Случайная величина ξ непрерывна, случайная величина η дискретна. Верно ли, что случайная величина $\xi\eta$ всегда непрерывна? Доказать или опровергнуть.
14. Случайная величина ξ непрерывна, независимая от ξ случайная величина η дискретна. Верно ли, что случайная величина $\xi\eta$ всегда непрерывна? Доказать или опровергнуть.
15. Может ли сумма двух не непрерывных случайных величин быть непрерывной с.в.?
16. Может ли произведение двух не непрерывных случайных величин быть непрерывной с.в.?
17. Может ли произведение двух непрерывных случайных величин быть дискретной с.в.?
18. Может ли сумма двух не дискретных случайных величин быть дискретной с.в.?
19. Плотность распределения $f_\alpha(x) > 0, 0 < x < 2$ непрерывной случайной величины α и равна нулю вне $[0, 2]$, плотность $f_\beta(x) > 0, 0 < x < 1$ непрерывной случайной величины β и равна нулю вне $[0, 1]$. Может ли плотность суммы $\alpha + \beta$ быть тождественно равной нулю на $[0, 1]$?
20. Может ли произведение двух не дискретных случайных величин быть не постоянной дискретной с.в.?
21. Привести пример случайной величины такой, что ее производящая функция определена, а производящая функция ее квадрата не определена.
22. Привести пример двух случайных величин таких, что их производящие функция определены, но производящая функция их суммы не совпадает с произведением производящих функций слагаемых.

23. Привести пример трех явных формул $\xi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ $i = 1,2,3$ таких, что при интерпретации $[0,1]$ как вероятностного пространства соответствующие случайные величины ξ_i $i = 1,2,3$ независимы попарно и в совокупности.

24. Рассмотрим компоненты тавтологиеского вложения единичного квадрата $[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^2$ как компоненты случайного вектора — будут ли эти компоненты независимы?

25. Рассмотрим отображение $(x,y) \mapsto (-\ln x, -\ln y)$ единичного квадрата $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ как случайный вектор. Будут ли его компоненты зависимы?

26. Рассмотрим отображение единичного квадрата $[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^2$ заданное формулой $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$, его можно отождествить со случайным вектором. Будут ли его компоненты зависимы?

27. Найдите пример формулы для отображения единичного квадрата $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ так, чтобы соответствующий этому отображению случайный веектор был бы дискретным с независимыми компонентами.

28. Рассмотрим два отображения $\xi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ $i = 1,2$ заданные формулами $y = x^2$,$y = x^3$, будут ли они зависимы как случайные величины?

29. Привести пример явной формуы $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$, чтобы соответствующая случайная величина имела бы математическое ожидание $E\xi$, а второй момент не был бы определен.

30. Верно ли, что любая неотрицательная вещественнозначная функция $\varphi(t)$ является характеристической для некоторой случайной величины ξ, то есть $\varphi(t) = \varphi_\xi(t)$?

31. Верно ли, что если у случайной величины момент степени k определен, то существуют и все ее моменты меньших степеней?

32. Привести пример случайного вектора с некоррелированными, но зависимыми компонентами.

33. Какое из трех утверждений верны и почему:
    (a) Если α и β независимы, то и α^2 и β^2 независимы
    (b) Если α и β некоррелированы, то и α^2 и β^2 некоррелированы
    (c) Если α и β независимы,то α^2 и β^2 некоррелированы

34. Верно ли, что характеристическая функция неотрицательной случайной величины не может быть четной?

35. Возможно ли, чтобы сумма независимых непостоянных индикаторов равнялась бы константе?

36. Возможно ли чтобы сумма одинаково распределенных непостоянных индикаторов была бы индикатором?

37. Возможно ли, чтобы сумма независимых непостоянных индикаторов была бы индикатором?

38. Возможно ли чтобы произведение одинаково распределенных непостоянных индикаторов было бы индикатором?

39. Возможно ли, чтобы произведение независимых непостоянных индикаторов была бы индикатором?

40. Может ли сумма двух случайных величин, каждая из которых не гауссова, быть гауссовой с.в.?

41. Может ли произведение двух двух случайных величин, каждая из которых не гауссова, быть гауссовой с.в.?

42. Может ли отношение двух двух двух случайных величин, каждая из которых не гауссова, быть гауссовой с.в.?

43. Может ли произведение двух распределенных на $[-1,1]$ случайных величин, каждая из которых не константа, быть равномерно распределено на $[-1,1]$?

44. Может ли частное двух распределенных на $[-1,1]$ случайных величин, каждая из которых не константа, быть равномерно распределено на $[-1,1]$?

45. Может ли сумма двух распределенных на $[-1,1]$ случайных величин, каждая из которых не константа, быть равномерно распределенной на $[-1,1]$ с.в.?

46. Пусть $\xi_n \sim Binomial(n, p_n)$, $\eta_n \sim Binomial(n, q_n)$ две независимые случайные величины, причем $np_n \to p$, $nq_n \to q$. Сходится ли $\xi_n + \eta_n$ при $n \to \infty$? Если да, то объясните в каком смысле и найдите распределение предела.

47. Приведите пример непостоянной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и непостоянной случайной величины ξ, такой что ξ и $f(\xi)$ независимы, или докажите, что такого примера не существует.

48. Приведите пример непостоянной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и непостоянной случайной величины ξ, такой что ξ и $f(\xi)$ некоррелированы, или докажите, что такого примера не существует.

49. Известно, что $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = -1$, $\mathrm{D}\,\xi = \mathrm{D}\,\eta = 1$. Что можно сказать про случайную величину $\xi + \eta$?

50. Существует ли случайные величины ξ и η, такие что ξ, η, $\xi + \eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$?

51. Пусть ξ — гауссовская случайная величина, и η — тоже гауссовская, причем $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. Верно ли, что ξ, η независимы?

52. Пусть случайные величины ξ, η, ζ имеют плотность совместного распределения $p(x, y, z)$. Что можно сказать о плотности совместного распределения случайных величин $\xi + 2\eta - 3\zeta,\ \xi + \eta + \zeta\ , 3\xi + 4\eta - \zeta$?

53. Пусть случайные величины ξ, η, ζ таковы, что случайные величины $\xi + 2\eta - 3\zeta, \xi + \eta + \zeta, \xi - \eta + \zeta$ имеют многомерное нормальное распределение. Можно ли что-то сказать про совместное распределение ξ, η, ζ?

54. В линейном простанстве простых случайных величин (т.е. тех, что принимают конечное число значений) на Ω введем скалярное произведение как $E\xi\eta$ Рассмотрим линейное пространство L, состоящее из случайных величин вида $f(\eta)$ для всевозможных действительных функций f. Найдите ортогональную проекцию ξ на L.

55. Следует ли из сходимости по вероятности сходимость почти наверное?

56. Следует ли из сходимости по распределению сходимость по вероятности?

57. Что сильнее, сходимость почти наверное или сходимость в среднем квадратичном?

58. Следует ли из сходимости по вероятности сходимость в среднем квадратичном?

59. Пусть случайные величины $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$ по распределению. Следует ли отсюда, что их функции распределения $F_n(x) \to F(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$?

60. Пусть $p \geq 1$ и $c > 0$. Найдите такую последовательность X_n случайных величин, что $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^q] = 0$, если $q < p$, $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^p] = c$ и $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^q] = +\infty$, если $q > p$.

61. Пусть $p \geq 1$. Найдите такую последовательность X_n случайных величин, что $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^q] = 0$, если $q \leq p$ и $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^q] = +\infty$, если $q > p$.

62. Пусть $p \geq 1$. Найдите такую последовательность X_n случайных величин, что $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^q] = 0$, если $q < p$ и $\lim_n \mathbb{E}[|X_n|^q] = +\infty$, если $q \geq p$.

63. Дана последовательность независимых гауссовских случайных величин $X_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Верно ли, что последовательность $Z_n := (X_1 + \ldots + X_n)/\sqrt{n}$ сходится по распределению? Если да, то куда? По вероятности?

64. Пусть X - непрерывная случайная величина и $X_n \to X$ по распределению. Верно ли, что

$$\lim_n \sup_I |\mathbb{P}(X_n \in I) - \mathbb{P}(X \in I)| = 0$$

где I - интервалы?

65. Пусть X_n - случайная величина, $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{N}) = 1$. Пусть $p_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что для каждого k существует предел $\lim_n p_{n,k}$. Сходится ли X_n по распределению?

66. Верно ли, что квадрат характеристической функции всегда является характеристической функцией?

67. Привести пример функции, которая не является характеристической.

68. Является ли функция $\cos t^2$ характеристической?

69. Характеристическая функция суммы двух случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых. Можно ли утверждать, что слагаемые независимые?

70. Можно ли определить независимость случайных величин с помощью характеристических функций?

71. Для дискретной случайной величины $\begin{array}{c|c|c} \alpha & -1 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$ рассмотрим последовательность дискретных случайных величин β_n, определяемых в терминах событий A_n с $P(A_n) = 1 - \frac{1}{n}$. Положим

$$\beta_n(\omega) = \begin{cases} \alpha(\omega) & \omega \in A \\ 1 & \omega \notin A \end{cases}$$

Выполнена ли сходимость $\beta_n \Rightarrow \alpha$?

72. Пусть последовательность пуассоновских случайных величин κ_n такова, что параметр κ_n равен $1/n$. Исследовать последовательность κ_n на сходимость по вероятности.

73. Пусть α – равномерная на $[0.1]$ случайная величина, $\beta_1, \beta_2 \dots$ независимые между собой и с α равномерные на $[-1, 1]$ случайные величины. Сходится ли при $n \to \infty$ по вероятности последовательность вида $\frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n)$, где $\eta_i = \alpha + \beta_i$.

74. Объяснить на примере остается ли утверждение Центральной Предельной Теоремы для последовательности i.i.d случайных величин верным, если убрать в теореме условие независимости.

75. Пусть задана последовательность i.i.d. с.в. $\{\xi_i\}$, причем $E\xi_k = a$, $D\xi_k = \sigma^2$. исследовать последовательность случайных величин

$$\eta_m = \frac{\sum_{k=1}^m \xi_k}{\sum_{k=1}^m \xi_k^2}$$

на свойство сходимости по вероятности.

76. Общее «правило 3σ» в случае конкретных законов распределения может быть значительно улучшено: записать его для равномерного на $[-1, 1]$ распределения.

77. Общее «правило 3σ» в случае конкретных законов распределения может быть значительно улучшено: записать его для показательного распределения с параметром единица.

78. Верно ли, что среднее арифметическое десяти i.i.d равномерных на $[-1, 1]$ случайных величин лежит на том же отрезке с вероятностью большей 0.95?

79. Верно ли, что среднее арифметическое десяти i.i.d равномерных на $[-1, 1]$ случайных величин лежит на том же отрезке с вероятностью большей 0.97?

80. Верно ли, что для двух независимых случайных величин ξ, η из того, что их плотности являются четными функциями следует что медиана их произведения равна нулю? Верно ли аналогичное равенство для математического ожидания произведения?