

Семинар 10

ЖНФ 2 и немного вокруг

0. Выпишите все возможные жордановы формы 3×3 -ниль-матриц.

1. Выпишите все возможные жордановы формы 5×5 -ниль-матриц

а) индекса нильпотентности 2;

б) индекса нильпотентности 4.

2. Объясните, как по ЖНФ восстановить минимальный и характеристический многочлен оператора, и докажите, что минимальный многочлен делит характеристический. Как прямое следствие получаем теорему Гамильтона-Кэли.

3. Выпишите все возможные жордановы формы матриц, характеристический многочлен которых равен $\chi(t) = (t - 1)^3(t - 2)^2(t - 3)^2$, а минимальный многочлен равен $m(t) = (t - 1)^2(t - 2)^2(t - 3)$.

4. Найти ЖНФ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

5. Найти ЖНФ квадрата жордановой ниль-клетки, порядок которой не меньше двух.

6. Доказать, что ЖНФ любой целой степени невырожденной жордановой клетки есть снова жорданова клетка.

7. Найти ЖНФ оператора на комплексном векторном пространстве, если известно, что он обладает единственным одномерным инвариантным подпространством.

8. Если оператор на комплексном векторном пространстве удовлетворяет соотношению $A^m = E$, то он диагонализуем (доказать).

9*. Из всякого ли невырожденного оператора на комплексном векторном пространстве можно извлечь корень n -той степени?

10*. Операторы A и B на пространстве V удовлетворяют соотношению $AB - BA = B$. Доказать, что B – ниль-оператор.