

Во всех задачах основное поле считается алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Задача 1. Назовем касательной прямой в точке $x \in X$ к конике X по Штейнеру такую прямую l в плоскости, которая имеет с X единственную общую точку x . Докажите, что если коника по Штейнеру X получается посредством проективного отображения $f: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, то прямые $l = f(AB)$ и $m = f^{-1}(BA)$ - касательные к конике X в точках A и B соответственно.

Задача 2. Пусть C - невырожденная коника, и O - произвольная точка вне C . Проведем три произвольные прямые l, m, n через точку O , пересекающие конику C в точках X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 соответственно, как показано на рисунке ниже. Тогда по теореме Дезарга точки

$$S = (Y_1Z_1) \cap (YZ), \quad S' = (XZ_1) \cap (X_1Z), \quad S'' = (XY_1) \cap (X_1Y),$$

лежат на одной прямой, которую мы обозначим через \mathbf{p}_O . Докажите, что прямая \mathbf{p}_O не зависит от выбора вписанных в конику C перспективных треугольников XY_1Z_1 и X_1YZ , для которых она является осью Дезарга. Она называется *полярной точкой O относительно коники C* .

Задача 3. В условиях предыдущей задачи докажите, что произвольная прямая l через точку O , пересекающая конику C в двух различных точках A и B , пересекает полярную \mathbf{p}_O в точке P такой, что пара точек OP гармонически делит пару точек AB .

Задача 4. Полярной точки X на конике Штейнера C по определению называется касательная прямая к конике C в точке X . Напомним, что полярная точка вне коники была определена выше в задаче 1. Пусть коника Штейнера C задается однородным уравнением степени 2 в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ в \mathbb{P}^2 :

$$F(x) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_ix_j = x^T Ax = 0, \quad A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad \det A \neq 0, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что полярная \mathbf{p}_Y точки Y относительно коники C задается уравнением

$$y^T Ax = 0, \quad \text{или, что равносильно,} \quad x^T Ay = 0. \quad (1)$$

Задача 5. Докажите, что если точка X лежит на полярной \mathbf{p}_Y точки Y относительно коники C , то точка Y лежит на полярной \mathbf{p}_X точки X относительно C .