

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2024  
ЛИСТОК 9

1. Проверьте прямым вычислением, что обобщенные функции

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2c} \theta(ct - |x|),$$
$$G_2(\vec{x}, t) = \frac{\theta(ct - |\vec{x}|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - |\vec{x}|^2}},$$
$$G_3(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi c} \delta(c^2 t^2 - |\vec{x}|^2)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \Delta_d\right) G_d(\vec{x}, t) = \delta(t) \delta(\vec{x}), \quad d = 1, 2, 3,$$

где  $\Delta_d$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^d$ .

2. Решите задачу Коши на полупрямой  $x \geq 0$  для уравнения  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  с условиями  $u(0, t) = 0$ ,  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  ( $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ ).

3. Пусть  $u(\vec{x}, t)$  – функция, которая при  $t > 0$  удовлетворяет уравнению  $u_{tt} = c^2 \Delta$ ,  $u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$ ,  $u_t(\vec{x}, 0) = u_1(\vec{x})$  и  $u(x, t) = 0$  при  $t < 0$ . Докажите, что так определенная функция удовлетворяет уравнению

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \Delta\right) u(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}) \delta'(t) + u_1(\vec{x}) \delta(t).$$

4. Найдите сферически симметричное общее решение уравнения  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  в трехмерном пространстве.

5. а) Покажите, что уравнение Лиувилля  $u_{tt} - u_{xx} = e^u$  имеет решение

$$u(x, t) = \log \frac{8f'(x+t)g'(x-t)}{\left(f(x+t) - g(x-t)\right)^2},$$

где  $f, g$  – произвольные (трижды дифференцируемые) функции такие, что  $f'(x) > 0$ ,  $g'(x) > 0$ .

б) Покажите, что уравнение sine-Гордон  $u_{tt} - u_{xx} = -g \sin u$  ( $g > 0$ ) имеет решение

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\sqrt{g} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right),$$

где  $v$  – произвольный параметр такой, что  $|v| < 1$ .

6. Найдите решение уравнения  $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t)$  при

$$f(x, t) = \frac{e^{-t}}{x^2 + a^2}$$

на прямой такое, что  $u(x, 0) = 0$ .