Прикладные методы анализа – 2024

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

5 Цилиндрические и сферические функции

6 Уравнение теплопроводности

7 Некоторые задачи спектральной геометрии

8 Волновое уравнение

Волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

Оно в линейном приближении описывает распространение различных колебаний и волн в среде: например, колебания струн музыкальных инструментов, волны разрежения и сжатия в твердом теле, электромагнитные и гравитационные волны. Константа c имеет смысл скорости распространения волн.

Вывод волнового уравнения. Приведем вывод волнового уравнения, ограничившись случаем одного измерения. Рассмотрим малые поперечные колебания натянутой струны. Продольную координату обозначим через x, а смещение в поперечном направлении через $u = u(x)$ (будем считать, что смещение происходит в одной плоскости), причем u предполагается малым по сравнению с длиной струны, и $u_x \ll 1$, так что везде будем пренебрегать величиной u_x^2 в сравнении с u_x. Заметим, что в этом приближении длина любого участка струны от x_1 до x_2 $\ell(x_1,x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}\,dx$ остается неизменной при деформации. Рассмотрим малый участок δS струны от x до $x+\delta x$. В точке x смещение равно $u(x)$, в точке $x+\delta x$ оно равно $u(x+\delta x)$; малый угол α наклона касательной к струне в точке x равен $\alpha(x)=u_x(x)$, а в точке $x+\delta x$ он равен $\alpha(x+\delta x)=u_x(x+\delta x)=\alpha(x)+u_{xx}(x)\delta x$. Поскольку длина любого участка струны остается в нашем приближении неизменной при деформации, натяжение струны T по закону Гука одинаково по всей длине. Тогда результирующая сила, действующая на участок δS в продольном направлении, равна с нашей точностью нулю, поскольку разность $T\cos\alpha(x+\delta x)-T\cos\alpha(x)$ имеет порядок u_x^2, которым мы пренебрегаем. В поперечном направлении на участок δS действует сила

$$T\sin\alpha(x+\delta x)-T\sin\alpha(x)=T(\alpha(x+\delta x)-\alpha(x))$$
$$=T(u_x(x+\delta x)-u_x(x))=Tu_{xx}\delta x.$$

Масса участка δS равна $\rho\delta x$, где ρ – плотность струны. Скорость этого участка в поперечном направлении равна u_t, ускорение u_{tt}. Поэтому по второму закону Ньютона имеем

$$\rho u_{tt}\delta x=Tu_{xx}\delta x,$$

т.е.

$$u_{tt}=c^2u_{xx},\qquad c^2=\frac{T}{\rho}.$$

Распространение волн на прямой. Рассмотрим волновое уравнение на прямой

$$u_{tt}=c^2u_{xx}.$$

Перейдя к переменным $\xi=x+ct$, $\eta=x-ct$, запишем уравнение в виде $u_{\xi\eta}=0$, откуда следует, что общее решение имеет вид

$$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct),$$

где f, g – произвольные (дважды дифференцируемые) функции. Тем самым решение представляет собой суперпозицию возмущения с профилем $f(x)$, движущегося со скоростью c направо и возмущения с профилем $g(x)$, движущегося со скоростью c налево.

Воспользуемся этим общим решением, чтобы решить задачу Коши с начальными данными

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x).$$

Тогда должно быть

$$f(x)+g(x)=\varphi(x),\qquad c(g'(x)-f'(x))=\psi(x).$$

или

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=\varphi(x),\\ f(x)-g(x)=-\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(t)dt+C \end{cases}$$

Отсюда находим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(t')dt'.$$

Эта формула называется формулой Даламбера.

В частности, если начальное возмущение было локализовано вблизи точки $x = 0$, т.е. если в пределе мы имеем начальные условия $u(x,0) = a\delta(x)$, $u_t(x) = b\delta(x)$, формула Даламбера дает:

$$u(x,t) = \frac{a}{2}\Big(\delta(x-ct) + \delta(x-ct)\Big) + \frac{b}{2c}\Big(\theta(x+ct) - \theta(x-ct)\Big).$$

Отсюда мы видим, что при $b \neq 0$ возмущение в момент времени t отлично от нуля на всем отрезке $|x| \leq ct$ и равно нулю вне этого отрезка. Если же $b = 0$, возмущение локализовано в точках $\pm ct$, а остальные точки находятся в покое. Если начальное возмущение $u(x,0) = \varphi(x)$ было локализовано на каком-то конечном отрезке, а $u_t(x,0) = 0$, от него в обе стороны со скоростью c будут распространяться локализованные возмущения $\frac{1}{2}\,\varphi(x \pm ct)$, сохраняя свою форму, а остальные точки прямой будут в покое. Иными словами, обе волны (левая и правая) имеют в этом случае четко очерченные передний и задний фронты. Это простейший пример справедливости принципа Гюйгенса, о котором будет подробнее рассказано ниже в связи с задачей о распространении волн на плоскости и в пространстве. Если же $u_t(x,0) \neq 0$, принцип Гюйгенса нарушается – волна имеет передний фронт, но не имеет заднего.

Поучительно вывести формулу Даламбера другим способом, который хотя в данном случае и выглядит сложнее, но в отличие от использованных выше элементарных соображений обобщается на старшие размерности. Этот способ заключается в том, чтобы сначала найти функцию Грина волнового уравнения, т.е. функцию $G_1(x,t)$ такую, что

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)G_1(x,t) = \delta(t)\delta(x)$$

и $G_1(x,t) = 0$ при $t < 0$. Отметим, что функция Грина не единственна – к ней можно прибавить любое решение однородного уравнения. Очевидно, знание функции Грина позволяет найти решение неоднородного уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$, с любой функцией f такой, что $f(x,t) = 0$ при $t < 0$, по формуле

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy\, G_1(x-y, t-\tau) f(y,\tau), \qquad t > 0.$$

Потом мы покажем, как задачу Коши можно свести к решению неоднородного уравнения. Решить уравнение для функции Грина можно преобразованием Фурье по x, перейдя к Фурье-образу

$$G_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x,t) e^{ix\xi} dx.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$G_1(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(t) e^{-ix\xi} d\xi.$$

Фурье-образ δ-функции – функция от ξ, равная 1 на всей прямой. Легко видеть, что уравнение на функцию Грина после преобразования Фурье принимает вид

$$\partial_t^2 G_\xi(t) + (c\xi)^2 G_\xi(t) = \delta(t).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение по t. Его легко решить. Нетрудно убедиться, что решение таково:

$$G_\xi(t) = \theta(t)\frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}.$$

Тогда для функции Грина получаем:

$$G_1(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(c\xi t)}{c\xi}\,e^{-ix\xi}d\xi.$$

Взяв этот интеграл (это хорошая задача по теории функций комплексного переменного), находим:

$$G_1(x,t) = \frac{\theta(ct-|x|)}{2c}.$$

Возьмем в качестве функции $f(x,t)$ в неоднородном уравнении обобщенную функцию

$$f(x,t) = u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$$

и выпишем решение, пользуясь найденной нами функцией Грина:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\theta\Big(c(t-\tau)-|x-y|\Big)\Big(u_0(y)\delta'(\tau)+u_1(y)\delta(\tau)\Big).\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\delta(ct-|x-y|)u_0(y) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\theta(ct-|x-y|)u_1(y)\\
&= \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct)+u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}u_1(y)dy.
\end{aligned}$$

Мы получили формулу Даламбера для решения с начальными условиями $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$. Видим, что задача для неоднородного уравнения с неоднородностью указанного вида, сосредоточенной в точке $t=0$, эквивалентна задаче Коши для однородного уравнения. В этом можно убедиться и из самого определения функции Грина, не пользуясь ее явным видом. Действительно, мы имеем решение

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}G_1(x-y,t)u_1(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty}\partial_t G_1(x-y,t)u_0(y)dy.$$

Проинтегрировав уравнение $(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)G_1(x,t) = \delta(t)\delta(x)$ по t в пределах от $-t$ до t с учетом того, что $G_1(x,t)=0$ при $t<0$, и устремив $t\to+0$, найдем

$$\lim_{t\to+0}\partial_t G_1(x,t) = \delta(x), \quad \lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}G_1(x-y,t)u(y)dy = 0$$

для любой непрерывной функции $u(y)$. Тогда из формулы для $u(x,t)$ сразу получаем

$$\lim_{t\to+0}u(x,t) = u_0(x),$$

$$\lim_{t\to+0}u_t(x,t) = u_1(x) + \lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_t^2 G_1(x-y,t)u_0(y)dy.$$

Заменив в интеграле $\partial_t^2 G_1(x-y,t)$ на $c^2\partial_y^2 G_1(x-y,t)$ и дважды интегрируя по частям, найдем, что предел этого интеграла при $t\to+0$ равен нулю, так что $\lim\limits_{t\to+0}u_t(x,t) = u_1(x)$.

Метод функции Грина позволяет также получить формулу для решения неоднородного уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$, обобщающую формулу Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} dy f(y,\tau) + \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)dy.$$

Распространение волн в пространстве. Теперь рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

в трехмерном пространстве. Найдем функцию Грина $G_3(\vec{x},t)$ такую, что

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)G_3(\vec{x},t) = \delta(t)\delta(\vec{x})$$

и $G_3(\vec{x},t) = 0$ при $t < 0$. Трехмерное преобразование Фурье имеет вид

$$G_{\vec{\xi}}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} G_3(\vec{x},t) e^{i(\vec{\xi},\vec{x})} d^3x.$$

Фурье-преобразованное уравнение для функции Грина запишется в виде

$$\partial_t^2 G_{\vec{\xi}}(t) + c^2|\vec{\xi}|^2 G_{\vec{\xi}}(t) = \delta(t).$$

Решение находится точно так же, как в одномерном случае:

$$G_{\vec{\xi}}(t) = \theta(t)\,\frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|}.$$

Обратное преобразование Фурье дает:

$$G_3(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|}\, e^{-i(\vec{\xi},\vec{x})}\, d^3\xi = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|}\, \cos(\vec{\xi},\vec{x})\, d^3\xi.$$

Направим ось z вдоль вектора $\vec{x}$ и перейдем в сферическую систему координат

$$\vec{\xi} = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta), \quad d^3\xi = \rho^2 \sin\theta\, d r d\theta d\varphi.$$

Тогда будем иметь интеграл

$$G_3(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}\, \cos(\rho|\vec{x}|\cos\theta)\, d^3\xi$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta\, \frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}\, \cos(\rho|\vec{x}|\cos\theta)$$

$$= \frac{2\pi\theta(t)}{2(2\pi)^3 c}\int_{-\infty}^\infty \rho d\rho \sin(c\rho t) \int_{-1}^1 d\tau \cos(\rho|\vec{x}|\tau)$$

$$= \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2 c|\vec{x}|}\int_{-\infty}^\infty \sin(c\rho t)\sin(\rho|\vec{x}|)\, d\rho.$$

Последний интеграл надо понимать в смысле обобщенных функций, руководствуясь тождеством

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\rho x} d\rho = 2\pi\delta(x).$$

Тогда получим
$$G_3(\vec{x},t) = \frac{\delta(ct-|\vec{x}|)}{4\pi c|\vec{x}|} \;=\; \frac{\theta(t)}{2\pi c}\,\delta(c^2t^2-|\vec{x}|^2).$$
В отличие от функции Грина на прямой, которая отлична от нуля во всем "объеме" $|x|\le ct$, функция $G_3(\vec{x},t)$ есть обобщенная функция, сосредоточенная на поверхности сферы $|\vec{x}|=ct$ и равная нулю при $|\vec{x}|<ct$ и $|\vec{x}|>ct$.

Как и в одномерном случае, возьмем в качестве функции $f(\vec{x},t)$ в неоднородном уравнении $u_{tt}=c^2\Delta u+f(\vec{x},t)$ обобщенную функцию $u_0(\vec{x})\delta'(t)+u_1(\vec{x})\delta(t)$ и выпишем решение, пользуясь найденной функцией Грина:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3y\, G_3(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)\Big(u_0(\vec{y})\delta'(\tau)+u_1(\vec{y})\delta(\tau)\Big)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|\vec{y}-\vec{x}|=ct} dS_y u_1(\vec{y}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|\vec{y}-\vec{x}|=ct} dS_y u_0(\vec{y})\right).$$

Эта формула называется формулой Кирхгофа. Интегрирование в ней проводится по поверхности сферы радиуса ct с центром в точке $\vec{x}$, dS_y – элемент площади этой сферы. Записав $\vec{y}=\vec{x}+ct\vec{n}$, где $\vec{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$ – единичный вектор, можем представить формулу Кирхгофа в несколько более явном виде:

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} d^2\vec{n}\,u_1(\vec{x}+ct\vec{n}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} d^2\vec{n}\,u_0(\vec{x}+ct\vec{n})\right).$$

Здесь интегрирование идет по сфере единичного радиуса S^2 с мерой $d^2\vec{n}=\sin\theta\,d\theta d\varphi$. Легко проверить, что $u(x,0)=u_0(x)$, $u_t(x,0)=u_1(x)$, так что формула Кирхгофа дает решение задачи Коши.

Применим формулу Кирхгофа в случае, когда начальное возмущение локализовано в малой окрестности начала координат, в пределе точечного возмущения мы возьмем $u_0(\vec{x})=a_0\delta(\vec{x})$, $u_1(\vec{x})=a_1\delta(\vec{x})$. Интеграл в формуле Кирхгофа мы можем вычислить следующим образом:

$$\int_{S^2} d^2\vec{n}\,u_i(\vec{x}+ct\vec{n}) = a_i\int \delta(\vec{x}+ct\vec{y})\delta(|\vec{y}|-1)d^3y = a_i\,\frac{\delta(|\vec{x}|-ct)}{c^2t^2},$$

тогда решение запишется в виде

$$u(\vec{x},t) = a_1\frac{\delta(|\vec{x}|-ct)}{4\pi c|\vec{x}|} - a_0\frac{\delta'(|\vec{x}|-ct)}{4\pi|\vec{x}|}.$$

Мы видим, что спустя время t возмущение локализуется на сфере радиуса ct. Пусть теперь начальное возмущение отлично от нуля в некоторой ограниченной малой области пространства $V=V(0)$. Рассмотрим мгновенную пространственную картину возмущения $u(\vec{x},t)$ в момент времени t. Точки $\vec{x}$, находящиеся в возбужденном состоянии, характеризуются тем, что сферы радиуса ct с центром в точке $\vec{x}$ пересекают область V. Это означает, что геометрическое место точек $V(t)$, в которых возмущение отлично от нуля в момент времени t, состоит из точек $\vec{x}$, находящихся на сферах радиуса ct с центрами в точках области $V(0)$. Огибающие семейства этих сфер будут границами области $V(t)$. Внешняя огибающая является передним фронтом, внутренняя – задним фронтом распространяющейся волны. Таким образом, локализованное в пространстве начальное возмущение вызывает в каждой точке пространства действие, локализованное во времени с резко очерченными передним и задним фронтами, т.е. имеет место принцип Гюйгенса.

Решение неоднородного уравнения $u_{tt} = c^2\Delta u + f(\vec{x},t)$ с нулевыми начальными условиями дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{|\vec{x}-\vec{y}|\le ct} \frac{f\Big(\vec{y}, t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\Big)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,d^3\vec{y}.$$

В физике решения такого типа называют запаздывающими потенциалами.

Распространение волн на плоскости. Как ни странно, задача о распространении волн на плоскости сложнее рассмотренной выше задачи в пространстве как с математической, так и с физической точек зрения.

Найдем функцию Грина $G_2(\vec{x},t)$ двумерного волнового уравнения:

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)G_2(\vec{x},t) = \delta(t)\delta(\vec{x})$$

и $G_2(\vec{x},t) = 0$ при $t<0$. Решение методом преобразования Фурье ничем не отличается от трехмерного случая. Фурье-преобразованная функция Грина имеет вид

$$G_{\vec{\xi}}(t) = \theta(t)\,\frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|},$$

где теперь $\vec{\xi}$ – двумерный вектор. Обратное преобразование Фурье дает:

$$G_2(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\sin(c|\vec{\xi}|t)}{c|\vec{\xi}|}\,e^{-i(\vec{\xi},\vec{x})}\,d^2\xi.$$

Направим ось x вдоль вектора $\vec{x}$ и проведем вычисление в полярной системе координат $\vec{\xi} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $d^3\xi = \rho\,d\varphi$. Тогда будем иметь интеграл

$$G_2(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \rho d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}\,e^{-i\rho|\vec{x}|\cos\varphi}.$$

Интеграл по φ дает функцию Бесселя

$$J_0(\rho|\vec{x}|) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\rho|\vec{x}|\cos\varphi},$$

так что нам нужно вычислить интеграл

$$G_2(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{2\pi c}\int_0^\infty \sin(c\rho t)J_0(\rho|\vec{x}|)d\rho.$$

О том, как вычислять этот и ему подобные интегралы с функциями Бесселя, рассказано в книге [**?**]. Мы приведем ответ:

$$\int_0^\infty \sin(ax)J_0(bx)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}, & a>b,\\[2ex] 0, & a<b.\end{cases}$$

Пользуясь этим результатом, находим функцию Грина:

$$G_2(\vec{x},t) = \frac{\theta(ct - |\vec{x}|)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2 - |\vec{x}|^2}}.$$

В отличие от трехмерного случая, функция $G_2(\vec{x},t)$ отлична от нуля не только на окружности $|\vec{x}| = ct$, но и во всех внутренних точках диска $|\vec{x}| \leq ct$.

Как и в предыдущих случаях, возьмем в качестве функции $f(\vec{x},t)$ в неоднородном уравнении $u_{tt} = c^2\Delta u + f(\vec{x},t)$ обобщенную функцию $u_0(\vec{x})\delta'(t) + u_1(\vec{x})\delta(t)$ и выпишем решение, пользуясь найденной функцией Грина:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y}\, G_2(\vec{x}-\vec{y}, t-\tau)\Big(u_0(\vec{y})\delta'(\tau) + u_1(\vec{y})\delta(\tau)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi c}\int_{|\vec{x}-\vec{y}|\leq ct} \frac{u_1(\vec{y})\, d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}} + \frac{1}{2\pi c}\frac{d}{dt}\int_{|\vec{x}-\vec{y}|\leq ct} \frac{u_0(\vec{y})\, d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2t^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2}}.$$

Эта формула называется формулой Пуассона. Интегрирование в ней проводится по внутренности диска радиуса ct с центром в точке $\vec{x}$. Заменив переменную интегрирования $\vec{y} \to \vec{x} + \vec{y}$, запишем формулу Пуассона в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\int_{|\vec{y}|\leq ct} \frac{u_1(\vec{x}+\vec{y})\, d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2t^2 - |\vec{y}|^2}} + \frac{1}{2\pi c}\frac{d}{dt}\int_{|\vec{y}|\leq ct} \frac{u_0(\vec{x}+\vec{y})\, d^2\vec{y}}{\sqrt{c^2t^2 - |\vec{y}|^2}}.$$

Легко проверить, что $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$, так что формула Пуассона дает решение задачи Коши.

Убедимся, что при распространении волн на плоскости принцип Гюйгенса не имеет места. Пусть начальное возмущение задано в некоторой ограниченной малой области $S = S(0)$ на плоскости. Рассмотрим изменение состояния $u(\vec{x},t)$ в точке $\vec{x}$, находящейся вне S. Значение $u(\vec{x},t)$ определяется согласно формуле Пуассона начальными данными в точках $\vec{y}$, лежащих в круге радиуса ct с центром в $\vec{x}$. Пусть d – расстояние от $\vec{x}$ до ближайшей точки из области S. Для моментов времени $t < d/c$ функция $u(\vec{x},t) = 0$ – до точки $\vec{x}$ волна еще не дошла. Если же $t > d/c$, то $u(\vec{x},t) \neq 0$, т.е. начиная с момента $t = d/c$ в точке $\vec{x}$ возникает возмущение, постепенно убывающее до нуля при $t \to \infty$. В этом явлении последействия заключается главное отличие плоского случая от пространственного. Влияние начальных возмущений, локализованных в пространстве, не локализовано во времени. Картина возмущений на плоскости имеет резко очерченный передний фронт, но не имеет заднего. Принцип Гюйгенса не имеет места. В двумерном мире звук от резкого удара не сходил бы на нет через мгновение, а постепенно затухал бы весьма продолжительное время. Разборчивая речь была бы, вероятно, невозможной.

Отметим, что аналогичный анализ волнового уравнения в произвольном числе измерений приводит к выводу, что принцип Гюйгенса справедлив во всех нечетных размерностях $d \geq 3$ и не имеет места во всех четных размерностях (а также в одном измерении).

Наконец, выпишем решение неоднородного уравнения $u_{tt} = c^2\Delta u + f(\vec{x},t)$ с нулевыми начальными данными:

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi c}\int_0^t \int_{|\vec{y}|\leq c(t-\tau)} \frac{f(\vec{x}+\vec{y},\tau)d^2\vec{y}d\tau}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |\vec{y}|^2}}.$$

Решение неоднородной задачи с ненулевыми начальными данными дается суммой этого выражения и правой части формулы Пуассона.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.

[9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.

[10] Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис, *Элементы математической физики*, Наука, Москва, 1973.

[11] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly, Volume 73 (1966), Issue 4, Part 2: Papers in Analysis, 1–23.

[12] H.P. McKean, Jr., I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geom. **1** (1967) 43–69.