Семинар 11
Билинейные формы

Для произвольной билинейной формы на векторном пространстве V над полем F используется обозначение $(,)$. Форма называется невырожденной, если определитель матрицы билинейной формы не равен нулю. Вектор $v \in V$ называется анизотропным, если $(v, v) \neq 0$, и изотропным в противном случае.

Всюду, где речь идет о кососимметрической билинейной форме, предполагается, что $\mathrm{char} F \neq 2$.

1. Пусть $V_l{}^{\perp} = (x \in V \mid (x, V) = 0)$ и $V_r{}^{\perp} = (y \in V \mid (V, y) = 0)$. Докажите, что
а) оба множества – это подпространства одинаковой размерности в V;
б) форма невырожденна тогда и только тогда, когда оба указанных подпространства нулевые.

2. Приведите пример, показывающий, что, вообще говоря, эти подпространства не совпадают.

Ясно, что для симметричных (кососимметричных) форм $V_l{}^{\perp} = V_r{}^{\perp} = V^{\perp}$. Пространство $V^{\perp}$ называется ядром симметричной (кососимметриячной) билинейной формы.

3. Найти ядро билинейной формы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

4. В пространстве с ненулевой симметричной билинейной формой всегда найдется анизотропный вектор. Доказать.

5. В пространстве с кососимметричной билинейной формой все векторы изотропны. Доказать.

6. Доказать, что в пространстве с симметричной билинейной формой всякое ортогональное семейство анизотропных векторов независимо. Верно ли это утверждение, если отбросить требование анизотропности?

7. В пространстве с симметричной(кососимметричной) билинейной формой проверить следующие свойства ортогональных дополнений:
а) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;
б) Если $L_1 \subset L_2$, то $L_2{}^{\perp} \subset L_1{}^{\perp}$;
в) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1{}^{\perp} \cap L_2{}^{\perp}$;
г) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1{}^{\perp} + L_2{}^{\perp}$.

Квадратичная форма ($\mathrm{char} F \neq 2$)

Функцию $Q(x)$ на пространстве V называют квадратичной формой, если существует такая симметричная билинейная форма $(,)$, что $Q(x) = (x, x)$.

8. Доказать, что по квадратичной форме однозначно восстанавливается соответствующая ей симметричная билинейная форма.

Рассмотрим на вещественном n-мерном пространстве V симметричную невырожденную билинейную форму, и пусть $Q(x)$ – соответствующая ей квадратичная форма на V. Подпространство $U \subset V$ назовем положительным (отрицательным), если квадратичная форма Q принимает положительные (отрицательные) значения на всех ненулевых векторах из U.

9* Доказать, что
а) все максимальные (по включению) положительные подпространства равноразмерны;
б) ортогональное дополнение к максимальному положительному подпространству является максимальным отрицательным подпространством.

Пусть p – размерность любого максимального положительного подпространства. Пара чисел $(p, n-p)$ называется сигнатурой вещественной невырожденной билинейной (квадратичной) формы на пространстве V. Разумеется, p –это число плюсов в канонической записи формы $(,)$.