# Теория вероятностей 2024. Задачи 8. Характеристические функции.

1. Найдите характеристическую функцию $\varphi_\xi$, если

   а) $\xi = |\alpha|/\alpha$ при $\alpha \sim Uniform([-1,3])$; б) $\xi = \sqrt{\alpha}$ при $\alpha \sim Uniform([0,1])$;

   в) $\xi \sim Binomial(p,n)$; г) $\xi \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

2. Пусть случайные величины $\xi, \eta$ имеют стандартное нормальное распределение, $\alpha$ имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi]$ и $\xi, \eta, \alpha$ независимы. Найдите распределение $\xi\cos(\alpha) + \eta\sin(\alpha)$.

3. Пусть величины $X, Y, Z$ имеют стандартное нормальное распределение и независимы. Найдите распределение $\frac{X+ZY}{\sqrt{1+Z^2}}$.

4. Докажите, что сумма независимых пуассоновских случайных величин является пуассоновской. Приведите контрпример, если величины зависимые.

5. Объясните почему следующие функции не являются характеристическими

$$\sin(t), \qquad \cos(t^2), \qquad 1+\sin(t), \qquad e^{-t^4}$$

6. найдите случайные величины $X$, $Y$ такие что $X$ гауссово, $Y$ гауссово, $\mathrm{Cov}[XY] = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, но $(X,Y)$ не гауссово.

7. (распределение Коши) а) На плоскости с координатами $(x,y)$ из точки $(0,t)$, $t > 0$, провели прямую под случайным углом $\alpha \sim Uniform[0,\pi]$ к прямой $y = t$. Покажите, что точка ее пересечения с осью абсцисс имеет распределение Коши с параметром $t$, то есть имеет плотность $\varrho(x) = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}$.

   б) Найдите характеристическую функцию распределения Коши. Почему она не дифференцируема в 0?

   в) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — iid Коши. Как распределено их среднее $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \xi_j$? Как это соотносится с законом больших чисел?

   г) Докажите, что отношение двух независимых $\mathcal{N}(0,1)$ имеет распределение Коши.