

Семинарский листок 7
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Производная функции и её приложения

1. Найти производную функций

a) $\frac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}$; b) $\ln(\ln(\ln x))$; c) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$; d) $(2x + 3)^2(x + 1)^3$; e) x^x .

2. Докажите, что производная чётной дифференцируемой функции — нечётная функция, Производная нечётной дифференцируемой функции — чётная функция.

3. Каким условиям должны удовлетворять функции f и g , чтобы функция

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq a \\ g(x), & x < a \end{cases}$$

была дифференцируема на всей прямой?

4. Какие из функций $x \cdot |x|$, $|x|^{1+\sigma}$, $(\sigma > 0)$, $x \sin(x^{-1})$, $x^2 \sin(x^{-1})$ дифференцируемы в нуле?

5. а) Уравнение касательной к кривой, заданной графиком функции f , в точке x_0 имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Составьте уравнение касательной к кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

в точке со значением параметра $t = t_0$.

b) Выведите уравнение нормали к кривой, заданной графиком функции f , в точке x_0 , если функция задана явно и если кривая задана параметрически.

c) Выпишите уравнение касательной и нормали кривой

1) $y = 2x^2 + 3x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$;

2)

$$\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t \end{cases} \quad \text{в точке со значением параметра } t_0 = \pi/3.$$

6. Докажите неравенства:

a) $\ln x < x - 1$ при $x > 1$; b) $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2$ при $x > 0$;

c) $\sin x + \operatorname{tg} x \geq 2x$ при $x \in [0, \pi/2)$.

7. *Обобщённая теорема Ролля.* Пусть f определена на $[a, b]$ и пусть определена и непрерывна $(n - 1)$ -ая производная $f^{(n-1)}$. Пусть на (a, b) определена $f^{(n)}$. Пусть $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и $f(x_0) = \dots = f(x_n)$. Докажите, что в некоторой точке $\xi \in (x_0, x_n)$ справедливо $f^{(n)}(\xi) = 0$.

8. Найдите пределы

a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x) \ln x$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \sqrt[3]{1 + x^2}}{x^5}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/3} - \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}}{x^3}$.