Теория вероятностей 2024. Задачи 9. Сходимости случайных величин.

1. Докажите, что δ_{x_n} слабо сходится тогда и только тогда, когда x_n сходится к конечному пределу.

2. Пусть X_n - случайная величина, $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{N}) = 1$. Пусть $p_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что для каждого k существует предел $\lim_n p_{n,k}$. Сходится ли X_n по распределению?

3. Пусть $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$ и $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Для каких $-\infty < a \leq b < \infty$ выполнено соотношение $\lim_n \mathbb{P}(X_n \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b])$?

4. Пусть $X_n \sim \mathrm{Bernoulli}(1/n)$.

   (a) Постройте вероятностное пространство, в котором определены все $X_n, n \geq 1$, и $X_n \to 0$ п.н.

   (b) Постройте вероятностное пространство, в котором сходимости п.н. нет. А в каком смысле сходимость есть?

   (c) Верен ли пример, аналогичный последнему, если $X_n \sim \mathrm{Bernoulli}(2^{-n})$? Как это связано с леммой Бореля-Кантелли?

5. Приведите примеры случайных величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$ и ξ, определенных на одном и том же вероятностном пространстве, показывающие, что

   (a) Сходимость почти наверное и в L^p не следуют одна из другой;

   (b) Сходимость по вероятности не влечет сходимость почти наверное. В построенном примере укажите подпоследовательность, сходящуюся п.н.;

   (c) Сходимость по вероятности не влечет сходимость в L^p;

   (d) Сходимость по распределению не влечет сходимость по вероятности.

6. * Можно ли придумать пример iid последовательности случайных величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$, $\operatorname{Var} \xi_j < \infty$, таких, что в центральной предельной теореме сходимость к нормальному закону выполнена по вероятности?

7. Последовательности случайных величин $(\xi_n)_{n\geq 1}$ и $(\eta_n)_{n\geq 1}$ сходятся по распределению $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$.

   (a) Следует ли отсюда, что $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} \xi\eta$?

   (b) А если $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} (\xi, \eta)$?