# Ведение в алгебраическую топологию

Задачи семинара I

1. Дайте определение факторпространства $\overline{X} = X/A$, где $A$-замкнутое подпространство. Зачем требовать условие замкнутости для $A$? Верно ли, что имеется биекция между непрерывными отображений $\overline{X} \to Y$ и непрерывными отображениями $X \to Y$, переводящими $A$ в точку?

2. Докажите, что $B^n/\partial B^n \simeq S^n$.

3. Докажите, что надстройка сферы гомеоморфна сфере, $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$.

4. Докажите, что надстройка букета сфер (в ее редуцированном варианте) гомеоморфна букету сфер, $\Sigma \bigvee S^{n_i} \simeq \bigvee S^{n_i+1}$.

5. Докажите, что всякий конус является стягиваемым пространством.

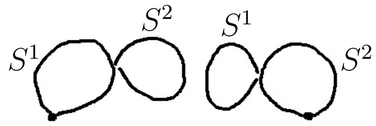
6. Приведите пример компактного пространства, гомотопически эквивалентного данному. Во всех перечисленных ниже случаях в качестве такого компактного пространства можно взять букет сфер. Определите количество сфер и их размерности.

   (а) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$;
   (б) $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$;
   (в) $\mathbb{R}^2 \setminus (n$ точек);
   (г) $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$;
   (д) $\mathbb{R}^k \setminus (n$ точек);
   (е) $\mathbb{R}^k \setminus (n$ точек);
   (ж) (тор) $\setminus$ (точка);
   (з) (поверхность рода $g$) $\setminus$ ($n$ точек);
   (и) $\mathbb{R}^3 \setminus$ (пара скрещивающихся прямых$\}$;
   (к) $\mathbb{R}^3 \setminus$ (пара пересекающихся прямых$\}$;
   (л) $\mathbb{R}^3 \setminus$ (стандартно вложенная окружность$\}$;
   (м) тор с диском, приклеенным к нему вдоль одной из его параллелей.

7. Докажите, $S^m * S^n \simeq S^{m+n+1}$.

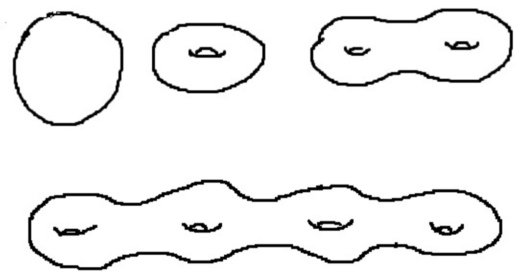
**Ведение в алгебраическую топологию**
Задачи семинара II

1. Какие из представленных ниже разбиений на клеки являются клеточными пространствами, а какие не являются?
(а) Букет сферы $S^2$ и окружности $S^1$, разбитые на три клетки размерностей 0, 1, 2 как на следующих двух рисунках:




(б) Замкнутый двумерный диск, разбитый на его внутренность (двумерная клетка) и точки граничной окружности (каждая из которых представляет собой 0-мерную клетку).
(в) Букет счетного числа окружностей, каждая из которой разбита на выделенную точку букета и ее дополнение.
(г) Объединение окружностей на плоскости радиусов $1/n$ для всевозможных натуральных $n$, касающихся друг друга в одной точке, разбитое на одну нульмерную клетку (общая точка касающихся окружностей) и бесконечное число интеравалов, полученных выбрасыванием из каждой из окружностей отмеченной точки?
(д) Полскость $\mathbb{R}^2$, разбитая на одну единственную двумерную клетку. Если это не является клеточным разбиением плоскости, предъявите разбиение, которое таковым является.

Пусть $S_g$ — *сфера с $g$-ручками.*



Количество «ручек» $g \geq 0$ называется *родом* поверхности. При $g = 0$ мы получаем сферу, при $g = 1$ — тор, при $g = 2$ — крендель, и т.д.

2. Докажите, что поверхность рода $g$ получается из $4g$-угольника склейкой подходящим образом его стороны попарно. Изобразите образы склеенных сторон. Полученные $2g$ замкнутые кривые $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ на поверхности в литературе обычно так и называются: *$a$,$b$-циклы.*

Всякая компактная поверхность допускает *триангуляцию* — разбиение ее на конечное число треугольников. *Ориентация* триангулированной поверхности — ориентация всех его треугольников, согласованная на ребрах (уточните, что это значит). Поверхность, допускающая ориентацию, называется *ориентируемой.*

3. Докажите, что поверхность $S_g$ ориентируемая.

4. Докажите, что $S_{g_1} \# S_{g_2} = S_{g_1+g_2}$, и что $S_g$ гомеоморфна связной сумме $g$ копий двумерного тора.

5. Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ неориентируема.

6. Может ли быть ориентируемой $M\#N$, если хотя бы одна из поверхностей $M$ или $N$ неориентируема?

7. Докажите, что $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна бутылке Клейна.

   В действительности, всякая связная *ориентируемая* компактная поверхность гомеоморфна $S_g$ (связной сумме $g$ торов) для некоторого $g$. А всякая связная *неориентируемая* компактная поверхность гомеоморфна связной сумме некоторого количества проективных плоскостей.

8. Какое место в приведенной классификации занимает поверхность, полученная в результате связной суммы, в которой участвуют как проективные плоскости, так и торы? Докажите, что $\mathbb{R}P^2\#T^2 \simeq \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$.

**Ведение в алгебраическую топологию**
Задачи семинара III

Во всех задачах этого листка под гомологиями подразумеваются симплициальные гомологии с целыми коэффициентами.

1. Докажите равенство $\partial \circ \partial = 0$ в цепном комплексе для симплициальных гомологий.

2. Вычислите симплициальные гомологии точки.

3. Вычислите $H_0(X)$ для произвольного симплициального множества $X$.

4. Вычислите симплициальные гомологии окружности $S^1$, выбрав в качестве ее симплициальной модели а) треугольник; б) $n$-угольник для произвольного $n \geq 3$.

5. Вычислите симплициальные гомологии a) тетраэдра (вместе с его внутренностью); b) поверхности тетраэдра, гомеоморфной сфере $S^2$.

6. Вычислите симплициальные гомологии $n$-мерного симплекса для произвольного $n$. Какой ответ следует ожидать до всяких вычислений, если иметь ввиду гомотопическую инвариантность гомологий?

7. Вычислите симплициальные гомологии $n$-мерной сферы, реализовав ее как граница $(n+1)$-мерного симплекса. (Указание: сравните цепной комплекс этой задачи с комплексом предыдущей задачи для всего $(n+1)$-мерного симплекса.)

8. Выберите какую-нибудь симплициальную реализацию и вычислите симплициальные гомологии двумерного тора $T^2 \simeq S^1 \times S^1$.

9. Выберите какую-нибудь симплициальную реализацию и вычислите симплициальные гомологии проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

10. Всякую компактную двумерную поверхность можно триангулировать, т.е. разбить на треугольники. Докажите, что независимо от выбранной триаргуляции для всякой двумерной компактной поверхности $H_2(M) = \mathbb{Z}$, если $M$ ориентируема и $H_2(M) = 0$, если $M$ неориентируема.

**Ведение в алгебраическую топологию**

Задачи семинара IV

1. Дайте определение «числа оборотов» замкнутого пути на плоскости, не проходящего через начало координат, как степени подходщего отображения.

2. Найдите степень следующих отображений:
(а) Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, продолженное по непрерывности на сферу Римана $S^2 = \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
(б) Аналогично для отображения, задаваемого произвольным многочленом степени $n$. Как полученный ответ связан с «основной теоремой алгебры», утверждающей, что у всякого комплексного многочлена имеется хотя бы один комплексный корень?
(в) Аналогично для отображения комплексного сопряжения $z \mapsto \bar{z}$.
(г) Аналогично для отображения, задаваемого рациональной функцией $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$, где $f$ и $g$ — многочлены степеней $m$ и $n$, соответственно.
(д) *Отображение Гаусса* $C \to S^2$, где $C$ — поверхность рода $g$ (сфера с $g$ ручками), вложенная в $\mathbb{R}^3$ (выберите произвольное удобное вам вложение), и $S^2$ — стандартная единичная сфера в трехмерном пространстве. Отображение сопоставляет точке поверхности вектор единичной нормали в этой точке.
(е) Антиподальная инволюция $x \mapsto -x$ единичной $n$-мерной сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Пусть задана пара замкнутые кривых $C_1$ и $C_2$ в $\mathbb{R}^3$, не имеющие общих точек. Их *индексом зацепления* называется степень отображения $C_1 \times C_2 \to S^2$, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$. Сравните это определение с другими, которые вам известны или приходят в голову. Зависит ли индекс зацепления от ориентации кривых $C_1$ и $C_2$? А от порядка этих кривых в паре?

**Ведение в алгебраическую топологию**

Задачи семинара V

1. Вычислите клеточные гомологии следующих пространств и опишите геометрически образующие этих групп:
а) $S^2$;
б) $T^2 = S^1 \times S^1$;
в) сфера с $g$ ручками $S_g$;
г) $S^n$;
д) $S^m \bigvee S^n$;
е) $S^m \times S^n$
(пространства $S^m \times S^n$ и $S^m \bigvee S^n \bigvee S^{m+n}$ имеют равные группы гомологий. Являются ли эти пространства гомотопически эквивалентными?);
ё) выразите гомологии букета $X \bigvee Y$ через гомологии пространств $X$ и $Y$;
ж) $T^n = (S^1)^n$;
з) $\mathbb{C}P^n$;
и) $\mathbb{R}P^2$;
к) бутылка Клейна $K^2$;
л) $\mathbb{R}P^n$.

2. Вычислите клеточные гомологии сферы с $g$ ручками $S_g$. Докажите, что

$$H_0(S_g) = \mathbb{Z}, \quad H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(S_g) = \mathbb{Z}.$$

Предъявите образующие этих групп.

3. Постройте пространство $X$, имеющее селедующие группы гомологий:

$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) = \mathbb{Z}_3, \quad H_k(X) = 0 \quad \text{при} \quad k > 1.$$

4. Докажите, что для гладкого компактного $n$-мерного многообразия $M$ выполняется

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & M \text{ ориентируемо}, \\ 0, & M \text{ неориентируемо}. \end{cases}$$

При каких $n$ ориентируемо $\mathbb{R}P^n$?

В случае, когда $M$ ориентируемо, образующая группы $H_n(M) \simeq \mathbb{Z}$ называется *фундаментальным классом* и обозначается через $[M]$. Эта образующая определена с точностью до знака. Выбор знака равносилен выбору ориентации многообразия.

5. Пусть $f : M \to N$ — непрерывное отображение гладких компактных ориентированных многообразий одинаковой размерности $n$. Докажите, что гомоморфизм $f_* : H_n(M) \to H_n(N)$ переводит $[M]$ в $d\,[N]$, где $d$ — степень отображения $f$.

6. Вычислите гомоморфизм $f_*$ (во всех градуировках) для следующих отображений:
а) $f$ — вложение в ленту Мёбиуса её граничной окружности;
б) антиподальная инволюция $S^n \to S^n$;
в) проекция в факторпространство $T^2 \to T^2/S^1$, где $S^1 \subset T^2$ — вложенная в тор окружность, ограничивающая диск;
г) аналогично, когда окружность $S^1 \subset T^2$ является одним из меридианов;
д) диагональное вложение $S^n \to S^n \times S^n$.

**Ведение в алгебраическую топологию**

Задачи семинара VI

1. Постройте клеточное разбиение и вычислите гомологии многообразия Грассмана $G_{2,4}$, образованного всевозможными двумерными подпространствами четырехмерного векторного пространства.

   **Подробнее про грассманиан $G_{2,4}$.** Его точки представляются матрицами $2\times 4$, строки которой представляют векторы в $\mathbb{R}^4$, порождающие данную плоскость. Матрица имеет максимальный ранг (т.е. 2) и определена с точностью до линейного преобразования ее строк. Всякую такую матрицу можно привести линейными преобразованиями строк однозначно к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

   где на месте звездочек стоят произвольные вещественные числа. Номера столбцов $i$ и $j$, $1 \le i < j \le 4$, на которых стоят столбцы $\binom{1}{0}$ и $\binom{0}{1}$, соответственно, однозначно определяются точкой пространства $G_{2,4}$ следующими условиями: $i$ — это номер первого ненулевого столбца, $j$ — это номер первого столбца, линейно независимого от $i$-го. Подмножество в $G_{2,4}$, отвечающее фиксированной паре индексов $(i,j)$, образует клетку: координатами в ней служат числа на месте звездочек. Таким образом, мы получаем клеточное разбиение пространства $G_{2,4}$, состоящее из $\binom{4}{2} = 6$ клеток. Элементы этого клеточного разбиения называются *клетками Шуберта* (аналогичное клеточное разбиение Шуберта имеется на произвольном грассманиане).

   Традиционно для обозначения клеток Шуберта вместо пары индексов $(i,j)$ используется пара индексов $(3-i, 4-j)$. Первая и вторая компонента этой пары — количество звездочек в первой и второй строке матрицы, соответственно. Кроме того, нулевые индексы, для краткости, отбрасываются. Одно из удобств такого соглашения заключается в том, что сумма индексов равна размерности клетки. Вот более явный список клеток получившегося разбиения:

$$\sigma_\emptyset : \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\sigma_1 : \left(\begin{smallmatrix} 0&1&*&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\sigma_{1,1} : \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&* \\ 0&0&1&* \end{smallmatrix}\right) \qquad \sigma_2 : \left(\begin{smallmatrix} 1&*&*&0 \\ 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\sigma_{2,1} : \left(\begin{smallmatrix} 1&*&0&* \\ 0&0&1&* \end{smallmatrix}\right)$$

$$\sigma_{2,2} : \left(\begin{smallmatrix} 1&0&*&* \\ 0&1&*&* \end{smallmatrix}\right)$$

   Наибольшую размерность 4 имеет клетка $\sigma_{2,2}$. Вообще, $G_{2,4}$ — гладкое 4-мерное многообразие (полезно понять, почему это так, независимо от клеточного разбиения). Цепной комплекс получившегося клеточного разбиения имеет вид

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z}^2 \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow \mathbb{Z} \longleftarrow 0.$$

   Вот уточненная формулировка последней задачи предыдущего семинара.

2. Задайте произвольным образом ориентации клеток, найдите коэффициенты инцидентности, и вычислите гомологии (целочисленные и с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) получившегося цепного комплекса для шубертовского клеточного разбиения грассманиана $G_{2,4}$.

   Рассмотрим также многообразие $G^+_{2,4}$, образованное *ориентированными* двумерными подпространствами в $\mathbb{R}^4$. Забывание ориентации определяет двулистное накрытие $G^+_{2,4} \to G_{2,4}$. Разбиение на клетки Шуберта переностится на $G^+_{2,4}$, и в нем в два раза больше клеток.

3. Вычислите гомологии многообразия $G^+_{2,4}$.

**Ведение в алгебраическую топологию**
Задачи семинара VII

1. Вычислите все члены длинной точной последовательности гомологий и связывающие их гомоморфизмы для следующих пар:
а) $(X, pt)$;
б) (лента Мёбиуса, её граничная окружность);
в) $(S^2, S^0)$;
г) $(\mathbb{T}^2, S^1)$, где $S^1$ — одна из параллелей на торе;
д) $(\mathbb{T}^2, S^1)$, где окружность $S^1$ ограничивает диск.

2. Вычислите гомологии факторпространства полнотория по его границе
а) из длинной точной последовательности;
б) из клеточного разбиения;
в) из двойственности Пуанкаре.

**Ведение в алгебраическую топологию**
Задачи семинара VIII

1. Вычислите гомологии трехмерного многообразия $W$ касательных векторов единичной длины к ориентируемой поверхности $C$ рода $g$.

   *Указание.* Обозначим через $\pi : W \to C$ естественную проекцию, сопоставляющую касательному вектору его точку касания. Слой этого отображения — это окружность единичных касательных векторов, приложенных к одной точки поверхности. Представим поверхность в виде объединения $C = C_1 \cup C_2$, где $C_1$ — замкнутый вложенный диск, а $C_2$ — замыкание его дополнения. Соответственно, $W$ представляется в виде объединения $W = W_1 \cup W_2$, где $W_1 = \pi^{-1}(C_1)$, $W_2 = \pi^{-1}(C_2)$. Воспользуйтесь для вычисления гомологий пространства $W$ длинной точной последовательностью пары $(W, W_2)$ (или $(W, W_1)$, на ваш выбор).

2. Проверьте, что при $g = 1$ многообразие $W$ задачи 1 гомеоморфно $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Сравните ответ задачи 1 с известными вам гомологиями трехмерного тора.

3. Проверьте, что при $g = 0$ многообразие $W$ задачи 1 гомеоморфно $SO(3) \simeq \mathbb{R}P^3$. Сравните ответ задачи 1 с известными вам гомологиями проективного пространства $\mathbb{R}P^3$.

**Ведение в алгебраическую топологию**

Задачи семинара IX

1. Вычислите кольца когомологий следующих пространств:
(а) $S^n$;
(б) $S^m \times S^n$;
(в) $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$;
(г) $\mathbb{C}P^n$;
(д) $\mathbb{R}P^n$, когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$.

2. Докажите, что если $X$ является надстройкой, $X = \Sigma Y$, то в когомологиях $X$ умножение тривиально.
(Указание: покажите, что в случае $X = \Sigma Y$ диагональное вложение $X \to X \wedge X = X \times X / X \vee X$ гомотопно отображению в точку.)

Утверждение последней задачи доказывает, наконец-то, что пространства $S^m \times S^n$ и $S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$, хотя и имеют изоморфные (ко)гомологии, не являются гомотопически эквивалентными. А именно, они отличаются умножением в когомологиях: в первом из них произведение $m$-мерной и $n$-мерной образующих дает $m+n$-мерную образующую, во втором пространстве умножение тривиально).

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^n$ — комплексное $k$-мерное подмногообразие (возможно, особое). Тогда оно задает класс гомологий $[X] \in H_{2k}(\mathbb{C}P^n)$. Поскольку группа $H_{2k}(\mathbb{C}P^n)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, мы имеем $[X] = d\,[\mathbb{C}P^k]$ для некоторого натурального $d$. Число $d$ называется *степенью* подмногообразия $X$. Геометрически, степень — число точек пересечения многообразия с проективным подпространством дополнительной размерности, находящемся в общем положении.

3. Найдите степень алгебраической комплексной кривой, задаваемой однородным уравнением степени $d$ в $\mathbb{C}P^2$. Выведите отсюда **теорему Безу**: *у системы уравнений*

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0,$$

*где $f$ и $g$ — многочлены от двух переменных степеней не выше $m$ и $n$, соответственно, с общими коэффициентами, имеется ровно $m\,n$ решений.*

*Комплексный грассманиан* $G^{\mathbb{C}}_{2,4}$ образован проективными прямыми в проективном пространстве $\mathbb{C}P^3$. У него имеется естественное клеточное разбиение Шуберта (см. задачи семинара VI), состоящее из 6 клеток. В комплексном случае все клетки имеют четную размерность, поэтому их классы образуют аддитивный базис (ко)гомологий.

4. Составьте таблицу умножения в когомологиях $G^{\mathbb{C}}_{2,4}$ в базисе циклов Шуберта.

5. Вычислите индекс 4-кратного самопересечения $\sigma_1^4$ цикла Шуберта комплексной коразмерности 1. Ответьте на следующий вопрос исчислительной проективной геометрии: сколько имеется проективных прямых в $\mathbb{C}P^3$, пересекающих четыре данные, находящиеся в общем положении?

**Ведение в алгебраическую топологию**

Задачи семинара X

Множество $\pi_3(S^2)$ классов гомотопий непрерывных отображений $f : S^3 \to S^2$ изоморфно множеству $\mathbb{Z}$ целых чисел. Изоморфизм задается целочисленным инвариантом, называемым *инвариантом Хопфа.* Геометрически он определяется как индекс зацепления $\mathrm{lk}(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$ двух общих слоев отображения (чтобы применить это определение, нужно прогомотопировать отображение $f$ в гладкое и выбрать два его произвольных некритических значения).

Мы хотим дать интерпретацию инварианта Хопфа в терминах умножения в когомологиях некоторого пространства. А именно, определим $X$ как результат приклейки к $S^2$ четырехмерной клетки посредством заданного отображения $f : S^3 \to S^2$, где $S^3$ рассматривается как граница 4-мерного шара. У пространства $X$ имеется клеточное разбиение, содержащее по одной клетке в размерностях 0, 2 и 4. Отсюда следует, что аддитивно (ко)гомологии пространства $X$ не зависят от выбора отображения $f$: $H_2(X) \simeq H^2(X) \simeq H_4(X) \simeq H^4(X) \simeq \mathbb{Z}$. Обозначим образующие соответствующих групп через $u \in H^2(X)$, $v \in H^4(X)$. Тогда элемент $u^2$ лежит в группе $H^4(X)$, и потому пропорционален образующей $v$.

1. Докажите, что $u^2 = h\,v$, где $h$ — инвариант Хопфа.

Из двойственности Пуанкаре вытекает, что пространство $X$ может быть многообразием только если $h = \pm 1$. В этом случае мы получаем $X = \mathbb{C}P^2$ (с комплексной ориентацией или обращенной, соответственно). Во всех остальных случаях $X$ не может быть многообразием. Таким образом, в задаче речь идет об умножении в когомологиях некоторого пространства, которое не является многообразием.

*Когомологической длиной* $\mathrm{len}(X)$ (связного) пространства $X$ называется минимального $k$, такое, что найдется $k$ классов когомологий положительной градуировки, произведение которых отлично от нуля (для какого-нибудь кольца коэффициентов). *Категорией Люстерника-Шнирельмана* $\mathrm{Cat}(X)$ называется минимальное $k$, такое что пространсто $X$ может быть покрыто $k$ стягиваемыми подпространствами. Имеется *неравенство Люстерника-Шнирельмана* (доказательсто которого обманчиво тривиально)

$$\mathrm{Cat}(X) \geq \mathrm{len}(X) + 1.$$

2. Определите минимальное количество карт, которые должен содержать произвольный атлас для следующих многообразий:
(а) $S^n$;
(б) $T^2$;
(в) $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{R}P^n$.
Докажите точность неравнества Люстерника-Шнирельмана во всех перечисленных случаях.

**Ведение в алгебраическую топологию**

Задачи семинара XI

1. Предъявите функции Морса (с по-возможности небольшим числом критических точек) на следующих многообразиях. Определите критические точки и их индексы Морса:
   (а) $S^n$;
   (б) $T^2$;
   (в) $S_g$ — сфера с $g$ ручками;
   (г) $S^m \times S^n$;
   (д) $T^n$;
   (е) $\mathbb{R}P^n$;
   (ж) $\mathbb{C}P^n$.

2. (а) Найдите критические точки их индексы Морса у функции $f = |x|^2 + |y|^2$ на *кривой Ферма* - вещественно двумерной поверхности в $\mathbb{C}^2$, задаваемой комплексным уравнением $x^n + y^n = 1$.
   (б) Кривая Ферма некомпактна, а рассматриваемая функция на ней неограничена. Докажите, что фукнция $\frac{f}{1+f}$ продолжается на замыкание кривой Ферма в комплексной проективной плоскости. Изучая критические точки этого продолжения, найдите эйлерову характеристику и род двумерной поверхности, полученной замыканием кривой Ферма.

3. (В.И. Арнольд, Математический тривиум.) Сколько максимумов, минимумов, и седловых точек имеется у функции $x^4+y^4+z^4+u^4+v^4$ на поверхности, задаваемой уравнениями $x+y+\cdots+v = 0$, $x^2 + y^2 + \cdots + v^2 = 1$, $x^3 + y^3 + \cdots + v^3 = C$?

# Введение в алгебраическую топологию

Задачи промежуточной контрольной работы

4. [10] Докажите, что следующая последовательность групп и гомоморфизмов

$$0 \longleftarrow C_0 = \mathbb{Z}_{18} \xleftarrow{6} C_1 = \mathbb{Z}_{18} \xleftarrow{6} C_2 = \mathbb{Z}_{18} \longleftarrow 0,$$

в которой два средних гомоморфизма задаются умножением на 6, является цепным комплексом. Вычислите его гомологии.

5. [10] Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — непрерывный путь, соединяющий точки $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(1)$ и рассматриваемый как сингулярный 1-симплекс. Обозначим через $\overline{\gamma}$ тот же путь, пройденный в обратном направлении, $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Проверьте, что сингулярная 1-цепь $a = \gamma + \overline{\gamma}$ обладает свойством $\partial a = 0$. Постройте сингулярную 2-цепь $b$, такую что $\partial b = a$.

6. Вычислите целочисленные гомологии следующих пространств:

а) [20] $\mathbb{R}^3$ без трех (аффинных) прямых, пересекающихся попарно в трех различных точках;

а)* (факультативно, на дополнительные баллы) $\mathbb{R}P^3$ без трех (проективных) прямых, пересекающихся попарно в трех различных точках;

б) [20] двумерный остов четырехмерного симплекса $\Delta^4$, т.е. объединение его двумерных граней.

7. [10] Существует ли непрерывное отображение ленты Мёбиуса на свою границу, тождественное на этой границе?

8. [10] Найдите степень отображения $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, заданного в однородных координатах формулой

$$(x : y : z) \mapsto (x^3 : y^3 : z^3).$$