

**Семинарский листок 8**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I**

**Выпуклые функции, старшие производные, формула Тейлора, эскизы графиков функций и кривых**

1. (*Преобразование Лежандра*) Пусть  $f$  — гладкая выпуклая функция,  $l_p$  — прямая, заданная уравнением  $y = px$ . Преобразованием Лежандра функции  $f$  называется функция

$$L(p) = \max_x \{px - f(x)\}.$$

1) Пусть  $(x_0, y_0)$  — точка, в которой прямая параллельная прямой  $l_p$  касается графика функции. Докажите, что при фиксированном  $p$  точка касания  $x_0$  будет корнем уравнения  $p = f'(x_0)$ .

2) Вычислите преобразование Лежандра функций  $x^2, e^x, \frac{x^\alpha}{\alpha}, \alpha \neq 0$ .

3) Докажите неравенство Юнга

$$px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}.$$

где  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, x, p \geq 0, \alpha, \beta > 1$ .

4) Докажите, что преобразование Лежандра гладкой выпуклой функции есть гладкая выпуклая функция.

5) Докажите, что преобразование Лежандра инволютивно, т.е. дважды применённое к исходной гладкой выпуклой функции  $f$  преобразование Лежандра, даёт саму функцию  $f$ .

6) Существует ли функция  $f(x)$ , такая что, ее преобразованием Лежандра будет функция  $f(p)$ ? Единственна ли такая функция?

2. Найдите старшие производные

$$y = \sin x, \quad y^{(n)} = ?, \quad y = x^2 e^{2x}, \quad y^{(20)} = ?$$

3. Разложите функции в ряд Тейлора в нуле с остаточным членом в форме Пеано

$$1) \sin(\sin x) \text{ до } x^6, \quad 2) \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \text{ до } x^4, \quad 3) \sqrt{1-\sin x} \text{ до } x^3.$$

4. 1) Вычислите  $\sin(1/2)$  с точностью до  $10^{-3}$ .

2) Вычислите  $\sqrt{1,01}$  с точностью до  $10^{-4}$ .

**Определение.** Прямая  $y = kx + b$  называется асимптотой графика функции  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ . Аналогично определяется асимптота при  $x \rightarrow -\infty$ .

5. Докажите, что график  $f$  имеет асимптоту  $y = kx + b$  при  $x \rightarrow +\infty$  в точности тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

6. Пусть существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ . Верно ли, что  $f$  имеет асимптоту?

7. Сделайте эскизы графиков функций

$$1) y = \frac{x^2}{x-1}, \quad 2) y = \frac{e^{2x+2}}{2x+2}, \quad 3) y = xe^{-x^2}.$$

8. Сделайте эскизы графиков параметрически заданных кривых

$$1) x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t^3}{t-1}, \quad 2) x(t) = 1 - t^2, y(t) = t(1 - t^2).$$

9. Сделайте эскизы графиков кривых заданных неявно

$$1) x^3 + y^3 = 3xy, \quad 2) x^2 - y^3 = 0.$$

### Памятка

**Построение эскиза графика функции состоит из нескольких основных этапов.**

1. Отыскание ОДЗ и построение приблизительного эскиза, включая вертикальные асимптоты.

2. Отыскание характерных точек на графике, корректировка эскиза, монотонность и выпуклость.

3. Построение невертикальных асимптот.

Вертикальная асимптота всегда возникает в ситуации, когда функция  $f$  определена при  $x > x_0$  или при  $x < x_0$ . причём при  $x \rightarrow x_0 + 0$  или при  $x \rightarrow x_0 - 0$  справедливо либо что  $f(x) \rightarrow +\infty$ , либо что  $f(x) \rightarrow -\infty$ . Такая ситуация возникает при делении на 0 и при построении графика функции «с логарифмами».

При построении эскиза графика естественно использовать общие свойства функции: чётность-нечётность, периодичность.

**Характерные точки.** Точки пересечения с осями координат. Иногда это сделать не удастся, уравнения не решаются, соответственно, некоторые точки считаем приблизительно.

Вычисляем производные и находим критические точки. Вычисляем вторую производную (если не сверхгромоздко) и смотрим тип критической точки.

Смотрим на знак производной между критическими точками, определяем промежутки монотонности.

Смотрим на знак второй производной между точками перегиба, определяем промежутки выпуклости и вогнутости.

**Построение эскизов графиков параметрически заданных кривых.**

Пусть заданы 2 функции  $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (непрерывные, дифференцируемые). Они задают на плоскости кривую: каждому значению  $t$  аргумента соответствует точка плоскости  $(x(t), y(t))$ .

Как изобразить кривую по имеющимся формулам  $x(t), y(t)$ ? Это вопрос сложный.

Одна из теоретических возможностей такая. Разбиваем множество допустимых значений переменной  $t$  на промежутки строгой монотонности (если это можно сделать, естественно) функции  $x(t)$ . Потом рассмотреть обратную к  $x(t)$  функцию  $t(x)$ . Теперь на множестве значений функции  $x(t)$  можно построить график функции  $y(t(x))$ , это будет кусок исходной кривой.

Естественно, можно выражать  $t$  через  $y$  и строить график функции  $x(t(y))$ .

Однако практически, в явном виде, выписать функцию  $t(x)$  либо не возможно, либо очень сложно и громоздко.

Правильно (по крайней мере в тех задачах, которые вам будут предлагаться на уроках) действовать обычным путём — как при построении графиков функций: эскиз, характерные точки, промежутки монотонности.