Семинар 9.

Задача 1. Пусть C - невырожденная коника в $\mathbb{P}^2$ и $f : \mathbb{P}^1 \to C,\ t \mapsto x(t)$ - ее рациональная параметризация. Докажите, что для любых 4 различных точек $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4 \in \mathbb{P}^1$ двойные отношения $(t_1 t_2 t_3 t_4)$ и $(x(t_1), x(t_2), x(t_3), x(t_4))$ совпадают.

Задача 2. На проективной плоскости над полем $\mathbb{K}$ характеристики $\neq 2$ даны невырожденная коника C и кривая Y с уравнением $\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0$ степени d, т. е. $\Phi(x_0, x_1, x_2)$ - однородный многочлен степени $d \geqslant 1$. Пусть Y не содержит C, т. е. найдется хотя бы одна точка $(y_0 : y_1 : y_2) \in C$ такая, что $\Phi(y_0, y_1, y_2) \neq 0$. Докажите, что кривые C и Y имеют не более, чем конечное число точек пересечения, и это число не превосходит $2d$.
Указание: воспользуйтесь существованием рациональной параметризации коники C_1.

Задача 3. На невырожденной конике Штейнера $\mathcal{C}$ даны 6 различных точек, касательные в которых образуют 6-угольник $ABCDEF$. Докажите теорему Брианшона, утверждающую, что большие диагонали AD, BE и CF этого 6-ка пересекаются в одной точке.

Задача 4. На невырожденной конике Штейнера $\mathcal{C}$ даны 4 различные точки, касательные в которых образуют 4-угольник $ABCD$. Докажите, что диагонали A и BD этого 4-угольника и прямые, соединяющие пары точек касания его противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Задача 5. На невырожденной конике Штейнера $\mathcal{C}$ даны 3 различные точки, касательные в которых образуют 3-угольник ABC. Докажите, что прямые, соединяющие вершины этого 3-ка с точками касания противолежащих им сторон, пересекаются в одной точке.

Задача 6. Даны три различные точки $A,\ B,\ C$ на невырожденной конике $\mathcal{C}$. Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, образованный касательными в точках $A,\ B,\ C$. Пусть $\{A, A_1\} = (AA') \cap \mathcal{C}$, $\{B, B_1\} = (BB') \cap \mathcal{C}$, $\{C, C_1\} = (CC') \cap \mathcal{C}$. Итак, по тройке точек $A,\ B,\ C$ построена новая тройка точек $A_1,\ B_1,\ C_1$ на $\mathcal{C}$. Покажите, что соответствие $\{A,\ B,\ C\} \rightsquigarrow \{A_1,\ B_1,\ C_1\}$ взаимно.