Семинар 10.

Задача 1. Рассмотрим пучок коник $\mathcal{P} = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$, порождаемый кониками $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ такими, что базисное множество $B(\mathcal{P}) = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ пучка $\mathcal{P}$ состоит из конечного числа точек (как мы знаем, не более четырех).
1) Докажите, что коники пучка $\mathcal{P}$ высекают на произвольной прямой l, не пересекающей базисное множество $B(\mathcal{P})$ пучка, пары точек одной инволюциии.
2) Докажите, что, обратно, все пары точек произвольной инволюции на прямой l высекаются кониками некоторого пучка.

Задача 2. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в невырожденную конику $\mathcal{C}$, и пусть $\mathcal{D}$ - коника, вписанная в треугольник ABC. Через произвольную точку A_1 на конике $\mathcal{C}$ проведем две касательные к конике $\mathcal{D}$, и пусть они пересекают $\mathcal{C}$ в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая B_1C_1 касается коники $\mathcal{D}$.
Указание: Пусть $P = A_1B_1 \cap BC$, $P_1 = AB \cap B_1C_1$, $Q = A_1C_1 \cap BC$, $Q_1 = AC \cap B_1C_1$. Проверьте, что соответствие $f: \ BC \to B_1C_1$ такое, что $f(B) = P_1$, $f(P) = B_1$, $f(C) = Q_1$, $f(Q) = C_1$, является проективным.

Вещественную евклидову плоскость $\mathbf{R}^2$ с координатами (x, y) дополним бесконечно удаленной прямой $\mathbb{P}^1_\infty$ с уравнением $x_0 = 0$ до вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$, где $x = x_1/x_0, \ y = x_2/x_0$. На прямой $\mathbb{P}^1_\infty$ рассмотрим пару точек $I = (0 : 1 : i)$ и $I = (0 : 1 : -i)$, где $i = \sqrt{-1}$. Пара точек $\{I, \ J\}$ называется *абсолютом* или *циклическими точками.*

Задача 3. 1) Проверьте, что вещественная коника $\mathcal{C}$ в $\mathbf{R}^2$ является окружностью тогда и только тогда, когда она пересекает прямую $\mathbb{P}^1_\infty$ в абсолюте $\{I, \ J\}$.
2) Докажите, что прямые l_1 и l_2 в $\mathbf{R}^2$ перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда их продолжения в $\mathbb{P}^2$ пересекают $\mathbb{P}^1_\infty$ в точках L_1 и L_2, гармонически делящих абсолют $\{I, \ J\}$.

Задача 4. Пользуясь утверждением 2 предыдущей задачи, докажите средствами проективной геометрии в плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbf{R}^2 \cup \mathbb{P}^1_\infty$, что три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.
(*Указание*: Рассмотрите пучок коник, проходящих через вершины треугольника и точку пересечения двух его высот.)

Задача 5. * (не обязательная) Найдите устное доказательство следующего факта: поляры фиксированной точки относительно коник произвольного пучка пересекаются в одной точке.