# Домашнее задание 4
# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
## Срок сдачи: 19 декабря 23:59 по Москве

*Минимум из количества сданных задач и 10 равняется оценке за листок. Звездочкой помечена задача повышенной сложности. Для того, чтобы задача была засчитана полностью, нужно сдать все пункты. Задачи 3–7, 11 и 12 сдаются устно, остальные – письменно.*

**1.** Найти старшие производные

$$1)\ y = x^2 \sin(2x),\ \ y^{(50)} = ?, \quad 2)\ y = (x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x},\ \ y^{(10)} = ?$$

**2.** Разложить в ряд Тейлора в нуле

$$1)\ \ln(\cos x) \text{ до } x^4, \quad 2)\ \frac{x}{e^x - 1} \text{ до } x^4.$$

**3.** Пусть функция $f$ выпукла на некотором интервале $(a, b)$. Докажите, что она удовлетворяет на любом меньшем отрезке $\Delta = [c, d] \subset (a, b)$ условию Липшица.

**4.** Докажите *неравенство Йенсена*: пусть функция $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая, $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

**5.** Пусть $f$ — выпуклая функция на $[0, 1]$. Верно ли, что найдётся интервал в $[0, 1]$, в каждой точке которого существует $f'$?

**6.** Пусть функция $f$ трижды дифференцируема на прямой. Верно ли, что найдётся интервал на котором она выпукла или вогнута?

**7*.** Пусть функция $f$ дважды дифференцируема на прямой. Верно ли, что найдётся интервал на котором она выпукла или вогнута?

**8.** Сделайте эскиз графиков функций

$$1)\ y = \frac{x}{\ln x}, \quad 2)\ y = (2x + 5)e^{-2x-4}.$$

**9.** Сделайте эскиз графика параметрически заданной кривой

$$x = 1 + t - t^2,\ \ y = t(1 - t^2) + t^2.$$

**10.** Сделайте эскизы графиков кривых заданных неявно

$$1)\ x^5 + y^5 = xy, \quad 2)\ x^4 + y^5 = 2x^2 y^2.$$

**11.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — непустые множества. Докажите, что $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ открыто тогда и только тогда, когда $A, B$ открыты, и замкнуто тогда и только тогда, когда $A, B$ замкнуты.

**12.** Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые множества. Их *суммой Минковского* называется множество $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Здесь $a$ и $b$ рассматриваются как элементы векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

1) Верно ли, что сумма Минковского компактов компактна?
2) Верно ли, что сумма Минковского замкнутых множеств замкнута?
3) Верно ли, что сумма Минковского открытых множеств открыта?