Семинар 13
Евклидово пространство 1

Обозначения: E^n – n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное арифметическое пространство со скалярным произведением, $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, $\mid x \mid$ – длина вектора.

Декартов базис=ортонормированный базис.

1. Симметричная матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ задает в некотором базисе билинейную симметричную форму на вещественном пространстве размерности 2. Доказать, что эта форма евклидова, вычислить длину и скалярное произведение векторов $x = (1, -1), y = (4, 5)$. Найти угол между ними.

2. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ быть матрицей евклидова скалярного произведения в некотором базисе?

3. Доказать, что в E^n всякое ортогональное семейство ненулевых векторов независимо.

4.Дополнить семейство $(0.5, 0.5, 0.5, 0.5), (0.5, -0.5, 0.5, -0.5)$ до декартова базиса в $\mathbb{R}^4$.

5. В $\mathbb{R}^4$ найти базис подпространства $\langle (1, 2, 0, -1), (0, -1, 1, 3), (3, 4, 2, 3) \rangle^{\perp}$.

6. В $\mathbb{R}^4$ найти ортогональную проекцию вектора $(9, 1, 3, -1)$ на подпространство $\langle (3, 0, 4, 1), (1, 1, 1, -1), (3, -3, 5, 5) \rangle$.

7. Доказать теорему Пифагора: в евклидовом пространстве $\mid X - Y \mid^2 = \mid X \mid^2 + \mid Y \mid^2$, если векторы X и Y ортогональны.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

8. Доказать, что процесс ортогонализации семейства векторов не увеличивает длину каждого из ортогонализуемых векторов.

9. Что можно сказать про семейство векторов, если в процессе его ортогонализации возникает нулевой вектор?

10^*. Доказать,что билинейная симметричная (?) форма $(A, B) = \mathrm{tr}(AB^t)$ задает евклидово скалярное произведение на пространстве квадратных матриц. Найти ортогональное дополнение к подпространству:
а) верхнетреугольных матриц;
б) симметричных матриц.

11^*. На векторном пространстве V над полем F заданы две билинейные симметричные формы B_1 и B_2, одна из которых, скажем форма B_1, невырожденная. Пусть A – симметричный оператор, ассоциированный с такой парой форм (есть свидетели, что он был построен на лекции). Доказать, что рассматриваемые формы можно одновременно привести к диагональному виду тогда и только тогда, когда оператор A диагонализируем над полем F.