

Задачи для подготовки к итоговой контрольной 24 декабря на тему

”Как я провел эту Осень на Линейке”

(3 задачи, продолжительность контрольной 2 часа, можно пользоваться любыми бумажными носителями)

По умолчанию, все рассмотрения в евклидовом пространстве E^n ведутся в ортонормированном базисе, а в арифметическом пространстве \mathbb{R}^n – в стандартном.

1. Дано независимое семейство векторов (a_1, \dots, a_n) . Будет ли независимым семейство $(b_1, \dots, b_n) \mid b_k = a_1 + \dots + a_{k-1} + a_{k+1} + \dots + a_n$?

2. Что можно сказать о линейном операторе, если все ненулевые векторы пространства, в котором он действует, являются его собственными векторами?

3. В пространстве E^4 задано семейство векторов $(a_1 = (1, 2, 2, 1), a_2 = (1, 1, -5, 3), a_3 = (3, 2, 8, -7))$. Найдите декартов базис их линейной оболочки и дополните его до декартова базиса всего пространства.

4. В арифметическом векторном пространстве \mathbb{R}^4 даны два подпространства $V_1 = \langle (1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0) \rangle$, $V_2 = \langle (3, 2, 1, 0), (4, 3, 2, 1) \rangle$. Покажите, что пространство \mathbb{R}^4 является прямой суммой этих подпространств и найдите проекции вектора $(1, 2, 3, 5)$ на каждое из них.

5. В евклидовом пространстве найти проекцию вектора $a = (7, -4, -1, 2)$ на подпространство W , заданное системой уравнений $2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$.

6. В предыдущей задаче из всех векторов подпространства W выбрать вектор, образующий наименьший угол с вектором a .

7. U и W – подпространства евклидова пространства одинаковой размерности. Дано, что U содержит ненулевой вектор, ортогональный W . Доказать, что W содержит ненулевой вектор, ортогональный U .

8. Если в n -мерном пространстве всякое k -мерное подпространство (при фиксированном $k, 1 \leq k < n$) инвариантно относительно действия оператора A , то $A = \lambda E$.

9. Определить сигнатуру квадратичной формы $3X^2 - Y^2 + 4Z^2 - 2XY + 6YZ - 4XZ$.

10. Как может выглядеть матрица линейного оператора в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 , если известно, что
а) базисные векторы e_1, e_2, e_3 являются собственными векторами оператора с собственными значениями 1, 2, 3 соответственно;
б) у оператора имеется ровно три инвариантных одномерных подпространства.