Семинар 14
Линейные операторы в евклидовом векторном пространстве 1

1. Доказать, что если подпространство $U \subset E^n$ инвариантно относительно оператора A, то подпространство $U^\perp$ инвариантно относительно сопряженного оператора A^*.

2. Доказать, что ядро сопряженного оператора A^* совпадает с ортогональным дополнением к образу оператора A.

3. Доказать, что оператор, сопряженный проектору, сам является проектором.

4. Доказать, что
а) ядро оператора A^*A совпадает с ядром A;
б) образ оператора A^*A совпадает с образом A^*.

5. В ортонормированном базисе четырехмерного евклидова пространства найти
а) матрицу оператора проектирования на подпространство $Z = 0$ параллельно одномерному подпространству $X = Y = Z = T$;
б) матрицу сопряженного оператора.

6. Доказать: для того, чтобы проектор на подпространство V параллельно подпространству W был симметричен необходимо и достаточно.чтобы $V \perp W$.

7. Доказать: для того, чтобы оператор A переводил каждый вектор в вектор, ему ортогональный, необходимо и достаточно, чтобы $A^* = -A$. Описать геометрически действие такого оператора в трехмерном евклидовом пространстве.

8. Доказать: для того, чтобы оператор A переводил ортогональный базис в ортогональную систему векторов необходимо и достаточно, чтобы векторы этого базиса были собственными векторами оператора A^*A.

9^*. Доказать: если $A^*A = AA^*$, то всякий собственный вектор оператора A является собственным и для оператора A^*.

10^*. Доказать, что отображение евклидова пространства в себя, сохраняющее скалярное произведение каждых двух векторов, линейно.