Семинар 15
Линейные операторы в евклидовом векторном пространстве 2

1. (Для тех, кто немного знаком с интегрированием). Обозначим через T_n линейную оболочку семейства функций $\langle 1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx \rangle$.

В пространстве T_n введем скалярное произведение (?) по формуле: $(f, g) = 1/\pi(\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx)$.

Показать,что:
а) указанное скалярное произведение евклидово;
б) функции $(1/2, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx)$ образуют ортонормированный базис пространства T_n;
в) оператор $A = \left(\frac{d}{dx}\right)^2$ самосопряжен в пространстве T_n, причем записывается диагональной матрицей (какой?) в базисе, указанном в пункте а).

2. Симметричный оператор записывается в ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису, в котором оператор записывается диагональной матрицей.

3. Доказать, что оператор в евклидовом пространстве симметричен тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора.

4. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ быть матрицей симметричного оператора в некотором (не обязательно ортонормированном !) базисе евклидова пространства. Если да, то найдите матрицу Грама скалярного произведения в этом базисе.

Вокруг Главной теоремы о диагонализуемости симметричного оператора в евклидовом пространстве.

5. Перевести утверждение главной теоремы на матричный язык.

6. Доказать, что два симметричных оператора тогда и только тогда одновременно диагонализуемы, когда они перестановочны. Настя утверждает, что базис, в котором оба оператора запишутся диагональными матрицами, можно всегда выбрать ортонормированным. Права ли Настя?

7. В вещественном линейном пространстве V рассмотрим две симметричные билинейные формы $C(x, y)$ и $B(x, y)$. Про форму $B(x, y)$. известно, что она евклидова (а общее, знакоопределенная) (это как?). Доказать, что в некотором базисе пространства V обе формы записываются диагональными матрицами.

8. Перевести утверждение задачи 7 на матричный язык.

9. В пространстве вещественных симметричных матриц билинейная форма(?) $(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ задает евклидово скалярное произведение(доказать). Как выглядит неравенство Коши-Буняковского в этом евклидовом пространстве?

10. Доказать, что ранг симметричной ненулевой матрицы A удовлетворяет неравенству $\mathrm{rk} A \geq \frac{(\mathrm{Tr} A)^2}{TrA^2}$.

11*. Для любых двух симметричных матриц A и B выполняется неравенство $\mathrm{Tr}(AB)^2 \leq \mathrm{Tr}(A^2B^2)$ (доказать).