Группы

AC7⋄1. Какие числовые множества с операциями — это группы? **а)** $(\mathbb{R}, +)$; **б)** $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$; **в)** $(n\mathbb{Z}, +)$, где n-натуральное число;

г) $(\{1, -1\}, \cdot)$;

д) множество степеней с целыми показателями для неравного нулю комплексного числа относительного умножения;

е) множество всех комплексных корней фиксированной степени n из 1 относительно умножения;

ж) множество комплексных корней всех степеней из 1 относительно умножения;

з) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения.

AC7⋄2. Какие отображения множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя образуют группу относительно композиции: **а)** все отображения; **б)** все инъективные отображения; **в)** все сюръективные отображения; **г)** все биективные отображения; **д)** все четные перестановки; **е)** все нечетные перестановки; **ж)** все транспозиции;

з) множество всех перестановок оставляющих на месте элементы некоторого фиксированного подмножества $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$;

и) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов некоторого подмножества $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ принадлежат S;

к) $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

AC7⋄3. Покажите, что полуинтервал $[0, 1)$ с операцией $\oplus$, где $x \oplus y = \{x + y\}$ - дробная часть от суммы, является группой. Какой группе из задачи зад. AC7⋄1 изоморфна эта группа? Докажите, что все конечные подгруппы этой группы циклические.

AC7⋄4. Какие подмножества квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

а) симметрические (кососимметрические) матрицы относительно сложения или относительно умножения;

б) невырожденные (вырожденные) матрицы относительно сложения или умножения;

в) матрицы с фиксированным определителем d относительно умножения;

г) верхнетреугольные матрицы с ненулевыми элементами на диагонали относительно умножения;

д) ортогональные матрицы относительно сложения или относительно умножения;

е) Для фиксированной нильпотентной матрицы A, все матрицы вида $f(A)$, где $f \in \mathbb{R}[t]$-любой многочлен для которого $f(0) \neq 0$, относительно умножения;

AC7⋄5. Является ли множество комплексных матриц

$$Q_8 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

группой относительно умножения?

AC7⋄6. Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?

AC7⋄7. Изоморфны ли группы S_3 и $SL_2(\mathbb{F}_2)$?

AC7⋄8. Покажите, что если для любого элемента группы $x^2 = 1$, то группа коммутативна.

AC7⋄9. Найдите все группы в которых **а)** 1; **б)** 2; **в)** 3; **г)** 4 элемента.

AC7⋄10. Покажите, что группа порядка 6 либо коммутативна, либо изоморфна группе S_3.