Симметрические многочлены

В этом листке все многочлены определены над $\mathbb{C}$. Используется обозначение

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

Элементарными симметрическими многочленами степени k от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \ldots < j_k \leqslant n} x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_k}.$$

Принято считать, что $\sigma_k = 0$, если $k > n$ и $\sigma_0 = 1$.

АЛ3◇1. Выразите через элементарные симметрические многочлены:

а) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$

б) $(x_1 - x_2)^2$

в) $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$

г) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$

д) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^3$

АЛ3◇2. Рассмотрим производящую функцию для элементарных симметрических многочленов от n перемены $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Sigma(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k t^k.$$

Покажите, что

а)

$$\Sigma = \prod_{l=1}^{n} (1 + t x_l),$$

б)

$$\frac{d}{dt} \ln(\Sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} s_k t^{k-1}.$$

АЛ3◇3. Пусть σ_{ki} – элементарный симметрический многочлен степени k от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Докажите, что

$$\sigma_{ki} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{(k-j)} (x_i)^{(k-j)} \sigma_j.$$

АЛ3◇4. Докажите формулу Ньютона

$$n\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(j-1)} \sigma_{n-j} s_j.$$

АЛ3⋄5. Вычислите значения симметрических многочленов s_k от комплексных корней n-ой степени из 1.

АЛ3⋄6. Покажите, что для любого комплексного числа z и ξ- первообразного комплексного кореня степени k из 1

$$(x-z)(x\xi-z)\dots(x\xi^{k-1}-z)=(-1)^{(k+1)}(x^k-z^k).$$

Персональный табель ____ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (8.12.2024)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
д			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			