Многочлены

АЛ2◇1. Покажите, что если несократимая дробь $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x],$$

тогда:
а) $p \mid a_0$, **б)** $q \mid a_n$, **в)** $(p - mq) \mid f(m)$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

АЛ2◇2. Покажите, что $P \in \mathbb{Z}[x]$ не может иметь целых корней, если $P(0)$ и $P(1)$ нечетные.

АЛ2◇3. Докажите, что неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен не имеет кратных комплексных корней.

АЛ2◇4. Докажите, что приводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с целыми коэффициентами раскладывается в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами. При этом степень каждого многочлена меньше чем степень самомго многочлена.

АЛ2◇5 (Признак неприводимости Эйзенштейна). Докажите, что если для многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ существует простое $p \in \mathbb{Z}$ такое, что

- старший коэффициент f не делится на p,
- все остальные коэффициенты f делятся на p,
- свободный член f не делится на p^2,

тогда многочлен f неприводим над $\mathbb{Q}$.

АЛ2◇6. Докажите, что

$$\Phi_p = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$$

неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен, если p - простое.

АЛ2◇7. Докажите, что над полем нулевой характеристики $\Bbbk$ многочлен $P \in \Bbbk[x]$ делится на свою производную тогда и только тогда, когда $P = a(x - x_0)^n$.

АЛ2◇8. Покажите, что многочлен $x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3l+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

АЛ2◇9. Докажите, что многочлен $f \in \mathbb{C}[x]_{<n}$, принимающий целые значения в n последовательных целых точках, принимает целые значения во всех целых точках.

АЛ2◇10. Докажите, что если $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, то $x^q - x = \prod\limits_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$

Персональный табель ____. **Листок № 2 (6.11.2024)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			