## Евклидовы кольца

**АЛ1⋄1.** На бревне поставили отметки, делящие его на 17 равных частей, и отметки, делящие его на 37 равных частей. Затем распилили по всем отметкам. Найдите набор (множество с кратностями) длин получившихся кусков.

**АЛ1⋄2.** Даны натуральные числа $k, m, n \in \mathbb{N}$. Чему равен НОД чисел $k^m + 1$ и $k^n + 1$?

**АЛ1⋄3 (Целые гауссовы числа[1]).** Покажите, что $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел и нормой $\|z\| = z\bar{z}$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ верно, что $\|z_1 z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[i]$.

**АЛ1⋄4.** Покажите, что любое простое в $\mathbb{Z}[i]$ делит простое натуральное число. Какая может быть норма у простого гауссова числа?

**АЛ1⋄5.** Покажите, что для простого $p \in \mathbb{Z}[i]$ фактор кольцо $\mathbb{Z}[i]/(p)$ это поле. Какая характеристика этого поля? Сколько элементов в этом поле?

**АЛ1⋄6.** Докажите, что натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда все простые натуральные числа вида $4k+3$ входят в его разложение на простые множетели в четной степени.

**АЛ1⋄7 (Целые числа Эйзенштейна).** Покажите, что $\mathbb{Z}[w] = \{a + wb | a, b \in \mathbb{Z}, w = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел и нормой $\|z\| = z\bar{z}$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[w]$ верно, что $\|z_1 z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[w]$.

**АЛ1⋄8.** Для $w = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\}$ найдите многочлен $F \in \mathbb{Z}[x]$ минимальной степени со старшим коэффициентом 1 такой, что $F(w) = 0$.

**АЛ1⋄9.** Покажите, что любое простое в $\mathbb{Z}[w]$ делит простое натуральное число. Какая может быть норма у простого числа Эйзенштейна?

**АЛ1⋄10.** Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ евклидово кольцо с обычными операциями сложения и умножения действительных чисел и нормой $\|a + \sqrt{2}b\| = |(a + \sqrt{2}b)(a - \sqrt{2}b)|$. Проверьте, что норма мультипликативна, а именно для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ верно, что $\|z_1 z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$. Найдите обратимый элемент бесконечного порядка в $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

**АЛ1⋄11.** Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + \sqrt{-5}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ коммутативное кольцо с единицей с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Докажите, что в этом кольце любой элемент раскладывается в произведение неприводимых, но это разложение возможно не единственно. Приведите пример неоднозначного разложения.

**АЛ1⋄12.** Покажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + \sqrt{-3}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$ коммутативное кольцо с единицей с обычными операциями сложения и умножения комплексных чисел. Найдите все обратимые элементы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Докажите, что в этом кольце любой элемент раскладывается в произведение неприводимых, но это разложение возможно не единственно. Приведите пример неоднозначного разложения.

[1] http://kvant.mccme.ru/pdf/1999/03/kv0399senderov.pdf

Персональный табель ________________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 1 (1.10.2024)**

| **№** | **дата** | **кто принял** | **подпись** |
|---|---|---|---|
| **1** | | | |
| **2** | | | |
| **3** | | | |
| **4** | | | |
| **5** | | | |
| **6** | | | |
| **7** | | | |
| **8** | | | |
| **9** | | | |
| **10** | | | |
| **11** | | | |
| **12** | | | |