Семинар 16

Операторы в евклидовом пространстве 2

1. Проверить, что ортогональные операторы в n-мерном евклидовом пространстве образуют группу $O(n)$ по умножению. Доказать, что ортогональная группа $O(n)$ транзитивно действует на множестве векторов единичной длины. Описать стабилизатор единичного вектора при этом действии.

2. Рассмотрим на евклидовой плоскости два семейства из трех векторов (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3). Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие для существования ортогонального оператора g, переводящего вектор a_i в вектор b_i, $i = 1, 2, 3$.

3. Найти канонический базис и канонический вид ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $1/3 \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Доказать, что произведение двух отражений $R_{v_1} R_{v_2}$ есть поворот каждого вектора плоскости $\langle v_1, v_2 \rangle$ на угол, равный удвоенному углу между векторами v_1 и v_2, и тождественное преобразование на пересечении их зеркал.

5. Доказать, что любой ортогональный оператор O в евклидовом пространстве есть произведение отражений. При этом минимальное число множителей равно рангу оператора $(O - E)$.

6. Оператор в евклидовом пространстве E называется косым, если $A^* = -A$. Доказать, что оператор является косым тогда и только тогда, когда для любого вектора $x \in E$ векторы Ax и x ортогональны.

7. Доказать, что для косого оператора A оператор $(E - A)$ обратим, а оператор $(E + A)(E - A)^{-1}$ ортогонален.

8. Доказать, что матрица косого оператора в двумерном евклидовом пространстве в любом ортонормированном базисе записывается матрицей вида $\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, где t – некоторое вещественное число.

9. Доказать, что матрица косого оператора в некотором ортонормированном базисе имеет клеточно-диагональный вид, где по диагонали стоят нули или 2-клетки из задачи 8.

10. Вычислить $\exp A$, где A матрица $\begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

11. Доказать,что для любого ортогонального оператора О с определителем 1 существует такой косой оператор K, что $O = \exp K$.