Теория функций комплексного переменного – 2025
Листок 2

Дробно-линейной функцией (д.-л. функцией) называется функция вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \qquad ad-bc \neq 0.$$

1. Докажите, что д.-л. функция осуществляет взаимно-однозначное отображение $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$.

2. Докажите, что д.-л. отображения образуют группу. Какой группе она изоморфна?

3. Докажите, что д.-л. функция переводит окружности и прямые в окружности (или прямые).

4. Напишите д.-л. функцию, переводящую три произвольные (различные) точки z_1, z_2, z_3 в три другие (различные) точки w_1, w_2, w_3. Единственна ли она?

5. Во что преобразуется квадрант $x > 0, y > 0$ при отображении $w = \dfrac{z-i}{z+i}$?

6. Найдите все дробно-линейные функции f такие, что $f(f(z)) = z$.

7. Докажите, что бидифференциал $\dfrac{dz_1 dz_2}{(z_1-z_2)^2}$ инвариантен относительно д.-л. преобразований.

Двойным отношением четырех различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 называется

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}.$$

Производной Шварца (шварцианом) голоморфной функции $w(z)$ называется выражение

$$S(w;z) := \frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2.$$

8. Докажите следующее тождество, связывающее двойное отношение со шварцианом:

$$\frac{(w(z+ta), w(z+tb), w(z+tc), w(z+td))}{(a,b,c,d)} = 1 + \frac{t^2}{6}(a-b)(c-d)S(w;z) + O(t^3)$$

$(t \to 0)$.

9. Докажите, что д.-л. функция сохраняет двойное отношение:

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

10. Докажите, что $S(w; z) = 0$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ – д.-л. функция.

11. Докажите, что четыре различные точки лежат на одной окружности (или на одной прямой), если и только если их двойное отношение вещественно.

12. Докажите, что

$$S(w; z) = 6 \lim_{\zeta \to z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{z - \zeta}.$$

13. Пусть $w(z)$, $f(w)$ – две функции, F – их композиция: $F(z) = f(w(z))$. Докажите, что

$$S(F; z) = S(f; w)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 + S(w; z).$$

14. Пусть f_1, f_2 – два линейно независимых решения дифференциального уравнения $f'' + Q(z)f = 0$. Покажите, что $Q(z) = \frac{1}{2} S(f_1/f_2; z)$.

15. Найдите общий вид д.-л. изоморфизмов (а) $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, (б) $\mathbb{U} \to \mathbb{U}$, (в) $\mathbb{U} \to \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ – верхняя полуплоскость, $\mathbb{U}$ – единичный круг).

16. Отобразите верхнюю полуплоскость на единичный круг так, чтобы $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$.

17. Сколько неподвижных точек может иметь д.-л. преобразование? Докажите, что если д.-л. преобразование имеет две неподвижные точки, то произведение производных в этих точках равно 1.

18. Д.-л. преобразование с одной неподвижной точкой z_0 называется параболическим. Докажите, что параболическое преобразование можно записать в канонической форме

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + h$$

если $z_0 \neq \infty$ и $w = z + h$ если $z_0 = \infty$.

19. Докажите, что д.-л. преобразование с двумя различными неподвижными точками z_1, z_2 можно представить в канонической форме

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

если $z_{1,2} \neq \infty$ и $w - z_1 = k(z - z_1)$ если $z_2 = \infty$. Преобразование называется гиперболическим, если $k > 0$, эллиптическим если $|k| = 1$ ($k \neq 1$) и локсодромическим в общем случае комплексного k.